

# Lineare Algebra

## Übungsblatt 6<sup>1</sup>

### Aufgabe 1

- i) Sei  $M_1 = \{v_1 := (1, 0, 1, 1), v_2 := (0, 2, -3, 1), v_3 := (2, 2, -1, 3)\} \subset \mathbb{R}^4$   
und  $M_2 = \{w_1 := (0, 1, -1, 1), w_2 := (3, -1, 5, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$ .

Bestimmen Sie eine Basis  $B_1$  von  $[M_1]$  sodass  $B_1 \subset M_1$ . Bestimmen Sie eine Basis  $\tilde{B}$  von  $[M_1 + M_2]$ . Ergänzen Sie  $\tilde{B}$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}^4$ .

- ii) Sei  $N = \{v_1 := (1, 0, 1), v_2 := (1, 1, 0), v_3 := (0, 1, 1), v_4 := (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{F}_2^3$ .  
Zeigen Sie, dass  $N$  ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{F}_2^3$  ist, und geben Sie alle Basen  $B \subset N$  von  $\mathbb{F}_2^3$  an.

### Aufgabe 2

Sei  $K[X]$  der Vektorraum der Polynome und  $B = \{X^k - X^{k-1}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ .

- i) Schreiben Sie  $X^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  als Linearkombination von  $B$ .  
ii) Zeigen Sie, dass  $B$  eine Basis von  $K[X]$  ist.

### Aufgabe 3

Sei  $V$  ein Vektorraum und sei  $B \subset V$ . Zeigen Sie:

- i)  $B$  ist genau dann eine Basis von  $V$ , wenn  $B$  ein Erzeugendensystem von  $V$  ist und jede echte Teilmenge  $C \subsetneq B$  kein Erzeugendensystem von  $V$  ist.  
ii)  $B$  ist genau dann eine Basis von  $V$ , wenn  $B$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $V$  ist und jede echte Obermenge  $C \supsetneq B$  keine linear unabhängige Teilmenge von  $V$  ist.

### Aufgabe 4

Sei  $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  der Vektorraum der Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}$  sei die Abbildung  $\delta_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y = x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- i) Zeigen Sie, dass  $B = \{\delta_x, x \in \mathbb{R}\}$  linear unabhängig ist.  
ii) Zeigen Sie, dass  $\{f_1(x) = 1, f_2(x) = x^2, f_3(x) = \sin(x)\}$  linear unabhängig ist. Ist es eine Basis von  $V$ ?

---

<sup>1</sup> auch im Internet unter  
[http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehner\\_ralf/LAWS1112/index.html](http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehner_ralf/LAWS1112/index.html)  
und im e-Learning System OLAT