Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2011/12
Frankfurt/M., 30. November 2011
Abgabetermin: 8.12.2011

Lineare Algebra

Übungsblatt 7[1]

Aufgabe 1

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) \mapsto (-7x + 4y - 2z, y, 28x - 14y + 8z)$$

1. Zeigen Sie, dass f linear ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von B_1 von Kern(f).
3. Bestimmen Sie eine Basis B_2 von Bild(f).

Aufgabe 2

Seien V, W zwei K-Vektorräume, und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.
Sei weiterhin $B := \{v_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V und $C := \{w_i \mid i \in I\}$ mit $w_i := f(v_i)$ für alle $i \in I$. Zeigen Sie:

1. f ist genau dann surjektiv, wenn C ein Erzeugendensystem von W ist.
2. f ist genau dann injektiv, wenn C linear unabhängig ist.

Aufgabe 3

Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$.
Zeigen Sie:

$$V = \text{Kern}(f) \oplus \text{Bild}(f).$$

Aufgabe 4

Sei K ein Körper und $V_n := \{f \in K[X] \mid \deg(f) \leq n\}$.
Aus Aufgabe 2, Blatt 6 wissen wir, dass neben $B := \{1, X, X^2, ..., X^n\}$ auch $C := \{c_0, c_1, ..., c_n\}$ mit $c_0 := 1$ und $c_i := X^i - X^{i-1}$ für $1 \leq i \leq n$ eine Basis von V_n ist.

1. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen Θ_{BC} und Θ_{CB}.
2. Verifizieren Sie an diesem Beispiel den aus der Vorlesung bekannten Fakt $\Theta_{BC}\Theta_{CB} = I_n$.
3. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $v := \sum_{i=0}^{n} X^i$ in der Basis C.

---

[1] *auch im Internet unter*
http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/LAWS1112/index.html
und im e-Learning System OLAT