Wintersemester 2011/2012 11.01.2012

Prof. Dr. Martin Möller
Dr. André Kappes

Lineare Algebra – Tutorium 11

Aufgabe 1 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

b) Welche Eigenwerte hat A? Welche davon kann man direkt an A ablesen?

c) Bestimme die Eigenräume der Eigenwerte von A.

d) Ist A invertierbar?

Aufgabe 2 Bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, deren charakteristisches Polynom gleich $-(X-1)(X+3)(X-5) \in \mathbb{R}[X]$ ist. Gibt es weitere Matrizen mit demselben charakteristischen Polynom?

Aufgabe 3 Zeige: Eine Matrix und ihre Transponierte haben diesselben Eigenwerte. Gilt dies auch für die Eigenvektoren?

Aufgabe 4 Es sei V ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, \ldots, b_4\}$ und $f : V \to V$ die durch

$$f(b_1) = b_2, \quad f(b_2) = b_1, \quad f(b_3) = b_4, \quad f(b_4) = b_3$$

definierte lineare Abbildung. Bestimme das Minimalpolynom von f.

Aufgabe 5 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Bestimme A^{256}.

Aufgabe 6 Es seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ die Polynome

$$f = X^4 + 3X^3 - X + 5 \qquad g = X^2 + 2X + 1$$

Teile f durch g mit Rest, d.h. bestimme $q, r \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\deg(r) < \deg(g)$ oder $r = 0$ und

$$f = qg + r.$$

Aufgabe 7 *(optional)* Es sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Von f sei bekannt, dass $\mathrm{Rang}(f) = 1$ gilt und dass -5 ein Eigenwert von f ist. Wie lautet das charakteristische Polynom von f?