Wintersemester 2011/2012 18.01.2012

Prof. Dr. Martin Möller
Dr. André Kappes

Lineare Algebra – Tutorium 12

Aufgabe 1 Welche der folgenden reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ist diagonalisierbar? Bestimme in diesem Fall eine Basis aus Eigenvektoren, sowie eine invertierbare Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $M^{-1}AM$ (bzw. $M^{-1}BM$) eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2 Es sei K ein Körper. Für welche $\lambda \in K$ ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in K^{2\times 2}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 3 Es V ein K-Vektorraum der Dimension n und $f \in \mathrm{End}(V)$. Es gelte, dass das charakteristische Polynom in einfache Linearfaktoren zerfällt, d.h.

$$\mathrm{CharPoly}_f = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

mit $\alpha_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$ und $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

Zeige: f ist diagonalisierbar.

Aufgabe 4 Die Eigenwerte der invertierbaren Matrix $A \in K^{n\times n}$ seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Bestimme die Eigenwerte von A^{-1}.

Aufgabe 5 *(optional)* Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so dass $f(U) \subseteq U$ gilt. Dann kann man f auf U einschränken und erhält einen Endomorphismus $f_{|U} : U \to U$, $u \mapsto f(u)$.

Zeige: $\mathrm{CharPoly}_{f_{|U}}$ teilt $\mathrm{CharPoly}_f$.