Blatt 3

Aufgabe 3.1 **(4 Punkte)**

Seien $U_i \subseteq G$ für $i = 1, \ldots, r$ Untergruppen von endlichem Index in der Gruppe G. Zeigen Sie, dass die Untergruppe $U := \bigcap_{i=1}^r U_i$ auch von endlichem Index ist und genauer $(G : U) \leq \prod_{i=1}^r (G : U_i)$ gilt.

Tipp: Definieren Sie eine natürliche Abbildung $G/U \to \prod_{i=1}^r G/U_i$.

Aufgabe 3.2 **(4 Punkte)**

Beschreiben Sie analog zum Beispiel 3.6 im Skript die Rechtsnebenklassen $B\backslash \mathrm{GL}_2(K)$ wobei B die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen ist:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \mu \end{pmatrix} ; \lambda, \mu, x \in K, \lambda, \mu \neq 0 \right\}.$$

Aufgabe 3.3 **(4 Punkte)**

Seien G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Wir betrachten die Operation von G auf der Menge seiner Untergruppen durch Konjugation. Den Stabilisator von U bzgl. dieser Operation bezeichnen wir mit $N_G(U)$. Zeigen Sie, dass $U \subseteq N_G(U)$ und dass $N_G(U)$ die größte Untergruppe von G ist, in der U ein Normalteiler ist.

Aufgabe 3.4 **(4 Punkte)**

Seien G eine endliche Gruppe, p der kleinste Primteiler von $|G|$ und $U \subseteq G$ eine Untergruppe vom Index p. Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler ist.

Tipp: Lassen Sie G in natürlicher Weise auf G/U operieren.

Abgabe der Lösungen am nächsten Mittwoch (21. 05.) um spätestens 13.00 Uhr!
Wer zum Scheinerwerb an der Klausur teilnehmen muss, darf in Zweiergruppen abgeben.