Blatt 1

Aufgabe 1.1 **(4 Punkte)**

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Mit $B(K)$ bezeichnen wir die Menge derjenigen oberen Dreiecksmatrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

für die $a_{ii} \in K^\times$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $a_{ij} \in K$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i < j$ gilt.

Zeigen Sie, dass $B(K)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ ist.

(**Tipp:** Betrachten Sie die aufsteigende Folge von K-Untervektorräumen

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{n-1} \subset W_n = K^n,$$

wobei für $0 \leq i \leq n$ der K-Untervektorraum W_i durch

$$W_i = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \, x_j = 0 \text{ für alle } j > i \right\} \subseteq K^n$$

definiert sei. Zeigen Sie: Für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt genau dann $A \in B(K)$, wenn $AW_i = W_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ gilt.)

Aufgabe 1.2 **(4 Punkte)**

(i) Zeigen Sie, dass für Elemente g, h einer Gruppe und $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$(gh)^n = g^n h^n \tag{$*$}$$

im Allgemeinen **nicht** gilt.

(ii) Zeigen Sie: Gilt $(*)$ für $n = -1$, dann kommutieren g und h und dann gilt $(*)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 1.3 **(4 Punkte)**

Es sei g ein Gruppenelement der Ordnung n. Bestimmen Sie für beliebiges $m \in \mathbb{Z}$ die Ordnung von g^m.

Aufgabe 1.4 **(4 Punkte)**

Wir betrachten das Quadrat in $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken $\binom{\pm 1}{\pm 1}$. Bestimmen Sie die Ordnung der Symmetriegruppe des Quadrats als Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Abgabe der Lösungen am nächsten Mittwoch (23. 04.)!