Blatt 2

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und X eine Menge mit einer G-Operation auf X. Zeigen Sie, dass die Bahnen $B \subseteq X$ genau diejenigen Teilmengen von X sind, für die gilt: Die G-Operation auf X lässt sich zu einer transitiven G-Operation $G \times B \to B$ einschränken.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen.

(i) Zeigen Sie, dass ein $\mathbb{F}$-Vektorraum V der Dimension d aus q^d Elementen besteht.

(ii) Bestimmen Sie die Ordnung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$.

(iii) Bestimmen Sie die Ordnung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ für $n \geq 1$.

Tipp: Lassen Sie $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ in natürlicher Weise auf $\mathbb{F}^2$ operieren und benutzen Sie die Bahnenformel. Verallgemeinern Sie dies per vollständiger Induktion.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Die Elemente von $\mathbb{P}^n(K)$ sind Geraden $L = Kv \subseteq K^{n+1}$ für $0 \neq v \in K^{n+1}$. Für eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ ist $AL = \{Aw\ ;\ w \in L\}$ ebenfalls eine Gerade in K^{n+1}. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_{n+1}(K) \times \mathbb{P}^n(K) &\to \mathbb{P}^n(K) \\ (A, L) &\mapsto AL \end{aligned}$$

eine Operation von $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ auf $\mathbb{P}^n(K)$ definiert.

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit dem Zauberwürfel (häufig auch als „Rubik's Cube" bezeichnet) beschäftigen. Der Zauberwürfel besteht aus 6 Seiten mit jeweils 9 Plaketten (Aufklebern), also insgesamt 54 Plaketten. Wir nehmen an, dass die Seitenmitten immer an derselben Position bleiben (dies können wir tun, da das Drehen einer mittleren Scheibe dieselbe Wirkung hat wie das Drehen der dazu parallelen äußeren Scheiben in die entgegengesetzte Richtung). Ignorieren wir die 6 fixen Seitenmitten, so bleiben also 48 Plaketten. Diese sind verteilt auf 8 Eckenwürfel mit je 3 Plaketten und 12 Kantenwürfel mit je 2 Plaketten. Diese 48 Plaketten nummerieren wir mit 1 bis 48 durch, etwa so:

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td><td>O</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td></tr>
<tr><td>12</td><td>L</td><td>13</td><td>20</td><td>V</td><td>21</td><td>28</td><td>R</td><td>29</td><td>36</td><td>H</td><td>37</td></tr>
<tr><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>30</td><td>31</td><td>32</td><td>38</td><td>39</td><td>40</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>44</td><td>U</td><td>45</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Die erlaubten Züge des Spiels sind nun durch die Rotationen der 6 Seiten O(ben), U(nten), V(orne), H(inten), L(inks), R(echts) des Würfels gegeben. Jede Rotation permutiert die Menge $\{1, \ldots, 48\}$, wir fassen daher die Rotationen der 6 Seiten O, U, V, H, L, R als Elemente der Permutationsgruppe $\mathcal{S}_{48}$ auf. Wir definieren nun die Rubiksgruppe als das Erzeugnis $\langle O, U, V, H, L, R \rangle$ in $\mathcal{S}_{48}$.

(i) Bestimmen Sie die Zykeldarstellung des Elements O, geben sie Anzahl und Länge der Zykel in den Zykeldarstellungen von U, V, H, L und R an, und bestimmen Sie die Ordnung der Elemente O, U, V, H, L und R.

(ii) Bestimmen Sie die Orbits der Operation der Rubiksgruppe auf der Menge der Plaketten $\{1, \ldots, 48\}$.

Abgabe der Lösungen am nächsten Mittwoch (07. 05.) um spätestens 13.00 Uhr!
Wer zum Scheinerwerb an der Klausur teilnehmen muss, darf in Zweiergruppen abgeben.