PROGRAMM ZUM SEMINAR
FUCHSSCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
SOMMERSEMESTER 2013

PROF. DR. MARTIN MÖLLER
DR. ANDRÉ KAPPES

Vortrag 1. *Mehr Funktionentheorie* **(Laveena Sharma)** In diesem Vortrag soll zuerst kurz an die wesentlichen Eigenschaften holomorpher Funktionen aus [FD] erinnert werden: die Definition von "holomorph", der Cauchysche Integralsatz und die daraus folgende Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen.
Anschließend geht es um Nullstellen, den Identitätssatz und den Satz von der Gebietstreue [Jä1, 3.4, 3.5 ohne Satz 14,15, S.26–30]. Damit können wir die 3 Typen von isolierten Singularitäten diskutieren [Jä1, 4.1,4.2, S.35–37], bzw. [FB, S. 129–134] (evtl. ohne Casorati-Weierstrass). Weiter brauchen wir die Riemannsche Zahlenkugel und meromorphe Funktionen [FB, S.152 – 158]; die Verweise auf die Laurententwicklung ignorieren wir; dafür benötigen wir die Aussage von Aufgabe 9 über die Dreifachtransitivität von Möbiustransformationen.

Vortrag 2. *Lösungstheorie von linearen Differentialgleichungen* **(Niklas Hahn)** Als Quelle für diesen Vortrag dient hauptsächlich [IKSY, S.1–12], wobei Theorem 2.3 weggelassen werden sollte. Zunächst wiederholen wir kurz Differentialgleichungen im Komplexen und insbesondere den Existenzsatz von Cauchy [FD, Kap. 8, 10.2], bzw. Theorem 1.1 in [IKSY]. Ein Argument für den Beweis von Theorem 1.2 steht in [Wal, §13, Satz II, S. 123–125] und kann bei Gelegenheit präsentiert werden. Die Aussage über analytische Fortsetzung aus Theorem 2.1 lernen wir später noch genauer; wichtig ist vor allem die Hauptaussage, dass die Lösungen einen endlich dimensionalen Vektorraum bilden (auch eine Wiederholung aus [FD]).
Anschließend werden singuläre Punkte einer Dgl. diskutiert und Frobenius' Methode und die Indexgleichung (oder charakteristische Gleichung) vorgestellt. Zum Abschluss betrachten wir Fuchssche Differentialgleichungen und führen das Riemann-Schema ein.

Vortrag 3. *Die hypergeometrische Differentialgleichung* **(Markus Rennig)** Die Quelle dieses Vortrags ist [IKSY, S.28–40]. Zuerst leiten wir ausgehend von einer Fuchsschen Dgl. mit 3 regulären Singularitäten die Parametrisierung der hypergeometrischen Differentialgleichung her. Dann zeigen wir, dass die hypergeometrische Reihe eine Lösung ihrer Dgl. ist [Yo2, III 1., III 2., S.59–61]. Die Konvergenz der hypergeometrische Reihe wurden schon [FD] diskutiert und muss nicht noch einmal wiederholt werden. Anschließend sollen Kummers 24 Lösungen vorgestellt werden. Abschließend soll noch die Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktionen von Euler vorgestellt werden [IKSY, S.52–53]. Dafür benötigen wir die Γ und Beta-Funktion. Diese findet man in [FB, Kap. IV.1, S.190–193] (bis Satz 1.2, ohne Residuen), bzw. in [FB, Aufgabe 12 a)–d), S.207].

Vortrag 4. *Hypergeometrische Differentialgleichungen in der Physik* **(Jan van den Brand)** In diesem Vortrag sollen zwei Probleme aus der Physik vorgestellt werden, bei denen eine hypergeometrische Differentialgleichung auftritt: Das Pendel [Sea, 2.5, S. 30–34] und der quantenmechanische harmonische Oszillator [Sea, 3.1, 3.2, S.41–48]. Für den letzteren brauchen wir die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung. Insbesondere sollte darauf eingegangen werden, dass die Lösungen des QM-Oszillators eigentlich Polynome (Hermite-Polynome) sind und dass die Energiezustände "quantisiert", also diskret sind. Eine Quelle für die physikalischen Hintergründe zur Schrödingergleichung ist [Pad, Kap. 1].

Vortrag 5. *Topologische Räume und Fundamentalgruppen* **(Rosemarie Martienssen)** Dieser Vortrag soll das Handwerkszeug aus (algebraischer) Topologie bereitstellen, das wir im Folgenden brauchen werden. Als erstes benötigen wir eine Zusammenfassung topologischer Grundbegriffe (z.B. aus [Jä2, S. 5–29]): die Definition einer Topologie, Abschluss und Inneres einer Menge, Umgebungen, metrische Räume und insbesondere $(\mathbb{C}, d(x, y) = |x - y|)$ als Beispiel für topologische Räume, stetige Abbildungen und Homöomorphismen; evtl. kann auch das Hausdorffsche Trennungsaxiom und der allgemeine Begriff der Kompaktheit (Überdeckungsendlichkeit) zusammen mit dem Satz von Heine-Borel (im $\mathbb{R}^n$ gilt: kompakt $\Leftrightarrow$ beschränkt und abgeschlossen) angesprochen werden. Außerdem sollte "zusammenhängend" und "wegzusammenhängend" wiederholt werden, was wir allerdings schon aus [FD] kennen.
Als nächstes wenden wir uns der Fundamentalgruppe zu [Hat, 1.1, S.25–31] und lernen Wege, Homotopie von Wegen, die Definition der Fundamentalgruppe und als erstes nichttriviales Beispiel die Fundamentalgruppe des Kreises (Theorem 1.7) kennen. Weiter benötigen wir den durch eine stetige Abbildung induzierten Gruppenhomomorphismus auf den Fundamentalgruppen und dass dieser ein Isomorphismus ist, wenn die Abbildung eine Homotopieäquivalenz ist. Um schließlich die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ zu bestimmen, brauchen wir freie Produkte von Gruppen und den Satz von Seifert-Van Kampen, der allerdings nur zitiert werden soll [Hat, 1.2, S.41–43]. Mit diesen Hilfsmitteln soll dann $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\})$ bestimmt werden (hierzu kann man uns um Auskunft fragen).

Vortrag 6. *Monodromie* **(Victor Klockmann)** Nun verbinden wir Topologie und Funktionentheorie. Zunächst zeigen wir die analytische Fortsetzung längs Kreisketten [Jä1, 5.1]. Den Logarithmus als Beispiel [Jä1, 5.2] kennen wir eigentlich schon aus [FD], er sollte daher nur kurz erwähnt werden. Anschließend setzen wir längs Wegen fort und kümmern uns darum, wie wir entlang *stetiger* Wege integrieren können [Jä1, 5.3,5.4]. Schließlich beweisen wir den Monodromiesatz über die Homotopieinvarianz der analytischen Fortsetzung [Jä1, 5.6].
Dann können wir uns der Monodromie einer Differentialgleichung widmen [IKSY, 4.1, S.75–79] und zeigen, dass analytische Fortsetzung einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(D, b) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (bis auf Konjugation) definiert. Als letztes soll kurz das Monodromieproblem vorgestellt werden.

Vortrag 7. *Monodromie der hypergeometrischen Differentialgleichung* **(Frederik Benirschke)** Nachdem wir wissen, was die Monodromie einer Dgl. ist, wollen wir sie in diesem Vortrag für die hypergeometrische Differentialgleichung explizit bestimmen. Dahin führen mehrere Wege, von denen wir zwei beschreiten können. Zunächst klassifizieren wir die Darstellungen der freien Gruppe in 2 Erzeugern und bestimmen dann, welche davon als Monodromie auftreten können [IKSY, 2.4.2,2.4.3, S.79–95]. Da der reduzible Fall viele Fallunterscheidungen beinhaltet, sollte man sich hier auf den irreduziblen Fall konzentrieren. Um eine Darstellung explizit (und nicht nur deren Konjugationsklasse) kennenzulernen, benutzen wir die

Euler-Integraldarstellung aus Vortrag 2 um die Gauß-Kummer-Identität herzuleiten [IKSY, Beweis 1, S.73] und mit deren Hilfe die Monodromiematrizen zu berechnen [IKSY, 2.4.7, S.114–116] (Theorem 4.7.2 hat dort keine Beweis; die Aussage folgt aber aus Theorem 4.7.1 und dem Aussehen der 24 Lösungen von Kummer).

Vortrag 8. *Die Schwarz-Abbildung und Schwarzsche Dreiecke* **(Patrick Bloss)** Die Motivation für diesen Vortrag ist zweifach: zum einen können wir mit den Lösungen der hypergeometrischen Dgl. konkret eine Abbildung von der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ auf ein gekrümmtes Dreieck (ein Dreieck dessen Ränder Kreisbögen sind) angeben. Dass dies möglich ist besagt abstrakt der Riemannsche Abbildungssatz (Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\neq \mathbb{C}$ ist konform äquivalent zu $\mathbb{H}$, siehe z.B. [Jä1, Kap. 10]), der hier nur zitiert werden soll. Zum anderen soll gezeigt werden, dass die Monodromiegruppe, aufgefasst als Untergruppe von Möbiustransformation, die Untergruppe der orientierungserhaltenden Abbildungen in der Gruppe, die von den Spiegelungen an den Seiten des gekrümmten Dreieck mit Winkel α, β, γ erzeugt wird, ist.
Zur Vorbereitung brauchen wir: Winkel, orientierungserhaltende und orientierungsumkehrende Abbildungen, konforme Abbildungen (winkel- und orientierungserhaltend), holomorphe Abbildungen sind konform wenn $f'(z) \neq 0$ [Con, S. 45–46], [FB, S. 52], Möbiustransformation sind kreistreu [Con, Theorem 3.14, S. 49] und das Schwarzsche Spiegelungsprinzip [Jä1, 3.3, S.24–25]. Damit geht es weiter in [Yo2, III.3–III.7, S.62–71], wobei der erste Teil daraus schon im letzten Vortrag behandelt wurde. Die Argumente sind in der Quelle allerdings etwas lückenhaft, hier soll man uns nach den Details fragen! Aussagen, die gezeigt werden sollen, sind: Der Quotient zweier Lösungen der HGDgl. bildet $\mathbb{H}$ bijektiv auf ein gekrümmtes Dreieck ab; die Winkel kann man an den Monodromiematrizen ablesen; Beschreibung der Monodromiegruppe (siehe oben)

Vortrag 9. *Hyperbolische Geometrie* **(NN)** Bei diesem Vortrag besteht Überschneidungspotenzial mit der Vorlesung "Modulformen". Je nach Vorkenntnis der Seminarteilnehmer sollte der Stoff deshalb angepasst werden.
Motivation: Im letzten Vortrag haben wir die Monodromiegruppe als Untergruppe einer Spiegelungsgruppe identifiziert. Je nachdem ob $\alpha + \beta + \gamma$ kleiner, gleich oder größer 1 ist, lebt diese Spiegelungsgruppe in einer hyperbolischen, euklidischen oder sphärischen Isometriegruppe. Zur weiteren Untersuchung brauchen wir deshalb Geometrie. Da der hyperbolische Fall der reichhaltigste ist, konzentrieren wir uns auf diesen.
Zum Inhalt: die hyperbolische Ebene als metrischer Raum, Geodätische, Poincaré-Modell, Isometrien, Winkel (Vergleich zum vorigen Vortrag!), die Möbiustransformationen in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sind genau die orientierungserhaltenden Isometrien, hyperbolischer Flächeninhalt und die Gauß-Bonnet-Formel für hyperbolische Dreiecke, Trigonometrie, zwei hyperbolische Dreiecke mit gleichen Winkeln sind kongruent [Kat, S. 1–20]

Vortrag 10. *Fuchssche Gruppen und Fundamentalbereiche* **(Morten Lüders)** In diesem und den nächsten Vorträgen geht es darum, wann die Monodromiegruppe eine Pflasterung der hyperbolischen Ebene mit Dreiecken bewirkt. Zunächst stellen wir fest, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die Gruppe diskontinuierlich operiert, also einen Fundamentalbereich hat, und dass eine Pflasterung äquivalent zu einem Fundamentalbereich ist.
Stichworte: die drei Typen von Möbiustransformationen, diskrete Untergruppen von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sind genau die diskontinuierlich operierenden, Folgerungen [Kat, 2.1,

2.2, S.23–33], Fundamentalbereiche, das Volumen als Invariante, Dirichlet-Fundamentalbereiche, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ als Beispiel [Kat, 3.1, 3.2, S.49–56]

Vortrag 11. *Poincarés Satz über Fundamentalpolygone* **(Max Bieri)** Poincarés Satz über Fundamentalpolygone sagt, wann eine von Seitenpaarungen eines Polygons erzeugte Untergruppe G von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ diskontinuierlich ist.
Wir folgen [Mas] (ein alternativer Beweis steht auch in [Bea, §9.8, S. 242–249]). Der Beweis liefert auch viel Information über die Gruppe G, nämlich in Form einer Präsentation. Als Vorarbeit brauchen wir deshalb Präsentationen von Gruppen [Art, S. 248–252].

Vortrag 12. *Dreiecksgruppen* **(NN)** Für welche Dreiecke ist die zugehörige Gruppe diskret? Ziel des Vortrags ist zu zeigen, dass dies genau die Dreiecksgruppen, d.h. solche, die von einem Dreieck mit Winkeln $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$ (mit $1/p+1/q+1/r < 1$) herkommen.
Die Vorlage ist [Bea, S.276–286]. Importiert werden muss je nach Zeit: Struktur des Dirichlet-Fundamentalbereichs [Kat, 3.5, S.67–75], Siegels Satz (endliches Volumen impliziert einen Dirichlet-Fundamentalbereich mit endlich vielen Seiten) [Kat, Theorem 4.1.1], die Signatur-Flächen-Formel ([Kat, Theorem 4.3.1] im kompakten und [Kat, Ex. 4.11] im nichtkompakten Fall). Eventuell kann man sich zur Vereinfachung auch nur auf den kompakten Fall beschränken.

Literatur

[Art] Artin M.: *Algebra*, Birkhäuser.
[Con] Conway, J. B.: *Functions of One Complex Variable I*, Springer.
[Bea] Beardon, A. F.: *The Geometry of Discrete Groups*, Springer.
[FB] Freitag, E., Busam, R.: *Funktionentheorie*, Springer.
[FD] Möller, M.: *Funktionentheorie und Differentialgleichungen*, Vorlesungsskript.
[Hat] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press.
[IKSY] Iwasaki, K., Kimura, H., Shimomura, S., Yoshida, M.: *From Gauß to Painlevé*, Vieweg.
[Jä1] Jänich, K.: *Funktionentheorie – Eine Einführung*, Springer.
[Jä2] Jänich, K.: *Topologie*, Springer.
[Kat] Katok, S.: *Fuchsian Groups*, The University of Chicago Press.
[Mas] Maskit, B.: *On Poincaré's Theorem for Fundamental Polygons*, Advances in Mathematics, **7**, 219–230, 1971
[Pad] Pade, J.: *Quantenmechanik zu Fuß*, Springer.
[Sea] Seaborn, J. B.: *Hypergeometric Functions and Their Applications*, Springer.
[Yo2] Yoshida, M.: *Hypergeometric functions, My Love*, Vieweg.
[Wal] Walter, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer.