

## BLATT 4

### Aufgabe 4.1

(1 Punkt)

- (i) Geben Sie an, ob Sie die Klausur zur Vorlesung „Grundlagen der Algebra“ mitschreiben. Geben Sie an, ob Sie die Klausur zur Vorlesung „Geometrie“ mitschreiben.
- (ii) Geben Sie an, ob Sie am 17.7. pünktlich um 10.00 Uhr zur Klausur erscheinen können oder ob Sie vorher eine andere Veranstaltung haben.

### Aufgabe 4.2

(4 Punkte)

Sei  $G$  (bzw.  $H$ ) eine Gruppe, die auf einer Menge  $X$  von links (bzw. von rechts) operiert. Die Operation von  $H$  sei frei und transitiv, und beide Operationen seien miteinander verträglich, d.h. für alle  $g \in G$ ,  $x \in X$  und  $h \in H$  gelte

$$g.(x.h) = (g.x).h.$$

- (i) Zeigen Sie, dass es nach Wahl von  $y \in X$  einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  gibt mit der Eigenschaft

$$g.y = y.(\varphi(g))$$

für alle  $g \in G$ .

- (ii) Wie ändert sich  $\varphi$ , wenn man ein anderes Element  $y \in X$  wählt?

### Aufgabe 4.3

(4 Punkte)

- (i) Sei  $V_4$  die Symmetriegruppe des Rechtecks. Zeigen Sie, dass man  $V_4$  als Untergruppe von  $S_4$  auffassen kann. Geben Sie dazu insbesondere die Elemente in  $V_4$  in Zykelschreibweise an.
- (ii) Zeigen Sie, dass  $V_4$  ein Normalteiler in  $S_4$  ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe  $S_3$  isomorph zu  $S_4/V_4$  ist.

**Tipp:** Verwenden Sie einen der Isomorphiesätze.

### Aufgabe 4.4

(4 Punkte)

- (i) Zeigen Sie:  $\mathbb{Z}^n/m\mathbb{Z}^n \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$
- (ii) Zeigen Sie:  $\mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{SL}_n(K) \simeq K^\times$ .
- (iii) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der alternierenden Gruppe  $A_n$ .

### Aufgabe 4.5

(4 Punkte)

- (i) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  zyklisch ist.  
**Tipp:** Finden Sie ein Element der Ordnung 15.
- (ii) Ist  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  zyklisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Abgabe der Lösungen am nächsten Mittwoch (04.06.) um spätestens 13.00 Uhr!**  
**Wer zum Scheinerwerb an der Klausur teilnehmen muss, darf in Zweiergruppen abgeben.**