Blatt 5

Aufgabe 5.1 **(4 Punkte)**

(i) Sei R ein Ring. Bestimmen Sie die Einheiten in $R[[X]]$. Bestimmen Sie das multiplikative Inverse der Elemente $1 + X$ und $1 - X + X^2 \in R[[X]]$.

(ii) Sei R ein Integritätsring. Bestimmen Sie die Einheiten in $R[X]$.

Aufgabe 5.2 **(4 Punkte)**

Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{R}[X]$. Bestimmen Sie den normierten Erzeuger der folgenden Ideale:

(i) $(X^{11} + X^6 + 2014, X^9 + 18{,}999)$,

(ii) $(X^7, X^4 + X^3)$,

(iii) $(2X^6, 6X^2)$,

(iv) $(3X^3 - 3X^2 - 15X - 9, X^2 - 4X + 3)$.

Aufgabe 5.3 **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper. Wir definieren $K[\varepsilon]$ als 2-dimensionalen K-Vektorraum mit Basis $(1, \varepsilon)$ und schreiben die Vektoren mit Koordinaten $a, b \in K$ bezüglich dieser Basis als $a + b\varepsilon$. Dann definieren wir eine Addition

$$(a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) = (a + c) + (b + d)\varepsilon$$

und eine Multiplikation

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + (ad + bc)\varepsilon.$$

(i) Zeigen Sie, dass $K[\varepsilon]$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

(ii) Bestimmen Sie die Einheiten in $K[\varepsilon]$.

Aufgabe 5.4 **(4 Punkte)**

Seien R, S kommutative Ringe mit Eins.

(i) Zeigen Sie: $R \times S$ ist mit den komponentenweisen Operationen ein kommutativer Ring mit Eins.

(ii) Ein Element e eines Rings heißt idempotent, falls $e^2 = e$ gilt. Zeigen Sie: Ist e ein idempotentes Element in R, so ist auch $1 - e$ idempotent. Außerdem definieren Addition und Multiplikation von R auf $Re \subseteq R$ die Struktur eines Rings mit Eins. Welches Element ist die Eins? Handelt es sich bei $Re \subseteq R$ um einen Teilring? Zeigen Sie, daß es einen Ringisomorphismus $R \simeq Re \times R(1 - e)$ gibt.

(iii) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Projektionen $\mathrm{pr}_1 : R \times S \to R$ und $\mathrm{pr}_2 : R \times S \to S$, definiert durch $\mathrm{pr}_1(r, s) = r$ und $\mathrm{pr}_2(r, s) = s$, sind Ringhomomorphismen.

(iv) Zeigen oder widerlegen Sie: Die natürlichen Inklusionen $i_1 : R \to R \times S$ und $i_2 : S \to R \times S$, definiert durch $i_1(r) = (r, 0)$ und $i_2(s) = (0, s)$, sind Ringhomomorphismen.

Abgabe der Lösungen am nächsten Mittwoch (18. 06.) um spätestens 13.00 Uhr!
Wer zum Scheinerwerb an der Klausur teilnehmen muss, darf in Zweiergruppen abgeben.