Blatt 6

Aufgabe 6.1 **(4 Punkte)**

Sei R ein Ring.

(i) Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to R$ gibt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{im}(\varphi)$ bzgl. Inklusion der kleinste Teilring von R ist. Wir nennen $\mathrm{im}(\varphi)$ den Primring von R.

(iii) Zeigen Sie, dass es genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $\mathrm{im}(\varphi) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Wir nennen n die Charakteristik von R und schreiben statt n auch $\mathrm{char}(R)$.

(iv) Zeigen Sie: Ist R ein Integritätsring, so ist $\mathrm{char}(R)$ eine Primzahl oder 0. (Insbesondere ist die Charakteristik eines Körpers K also eine Primzahl p oder 0. Im ersten Fall enthält K den Körper $\mathbb{F}_p$ als kleinsten Teilkörper, im zweiten Fall den Körper $\mathbb{Q}$. Der kleinste Teilkörper $\mathbb{F}_p$ bzw. $\mathbb{Q}$ eines Körpers wird als Primkörper bezeichnet.)

Aufgabe 6.2 **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper, über dem jedes Polynom $f \in K[X]$ vom Grad $\deg(f) > 0$ eine Nullstelle hat (d. h. K ist ein algebraisch abgeschlossener Körper). Zeigen Sie, daß jedes irreduzible Polynom in $K[X]$ linear (d. h. vom Grad 1) ist.

Aufgabe 6.3 **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie unter Verwendung des euklidischen Algorithmus den ggT der Elemente a und b und schreiben Sie den ggT als R-Linearkombination von a und b:

(i) $a = 256,\ b = 2014,\ R = \mathbb{Z}$,

(ii) $a = X^3 - 1,\ b = X^2 - 2X + 1,\ R = \mathbb{Q}[X]$,

(iii) $a = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2,\ b = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2,\ R = \mathbb{R}[X]$.

Aufgabe 6.4 **(4 Punkte)**

(i) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

(ii) Bestimmen Sie eine Matrix in $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ mit Minimalpolynom $x^2 - 1$.

Abgabe der Lösungen am nächsten Mittwoch (02. 07.) um spätestens 13.00 Uhr!
Wer zum Scheinerwerb an der Klausur teilnehmen muss, darf in Zweiergruppen abgeben.