Arithmetik elliptischer Kurven

Blatt 2 — 12.11.2014

Aufgabe 1.

Begründen Sie, ob die folgenden Kubiken elliptische Kurven sind:

(a) $y^2 = x^3 - 3x + 2$,

(b) $y^2 = x^3 - 2x + 2$.

Aufgabe 2.

Transformieren Sie die Kubik $x^2y + xy^2 = 6(xy - 1)$ in Weierstraß-Form.

Aufgabe 3.

Wir betrachten die Kubik $C = \{Y^2Z = X^2(X + aZ)\} \subset \mathbb{P}^2$ mit $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass C in $[0 : 0 : 1]$ eine Singularität hat und außerhalb dieses Punktes glatt ist. Setze $C_{\mathrm{sm}} := C \setminus \{[0 : 0 : 1]\}$.

Zeigen Sie, dass die Bijektion

$$\begin{array}{lcll} C_{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}) & \to & \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{[1 : \lambda] : \lambda^2 = a\} & \to (\mathbb{Q}[T]/(T^2 - a))^\times \big/ \mathbb{Q}^\times \\ A & \mapsto & \text{Gerade durch } 0, A & \\ & & [X : Y] & \mapsto Y + TX \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.