Prof. J. Stix, N. Shajari Wintersemester 2014/2015

Arithmetik elliptischer Kurven

Blatt 4 — 10.12.2014

Aufgabe 1.

Wir betrachten das in der Vorlesung besprochene Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y_1(4)(K) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \frac{1}{4}, \infty\}(K) \arrow[d, "t \mapsto j(t)"] \\
\mathrm{Ell}(K) \arrow[r, "j"] & \mathbb{A}^1(K)
\end{tikzcd}$$

Zur Erinnerung: E_t ist gegeben durch $Y^2 = X^3 + (1-2t)X^2 + t^2X$.
Bestimmen Sie $j(t)$.

Aufgabe 2.

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 3$. ζ sei eine fest gewählte dritte Einheitswurzel in K. Bestimmen Sie

$$Y(3)(K) := \{(E, P, Q) \mid E/K \text{elliptische Kurve}, P, Q \in E(K), \mathrm{ord}(P) = \mathrm{ord}(Q) = 3,$$
$$P \neq \mathcal{O}, Q \notin \{\mathcal{O}, P, -P\}\}.$$

Aufgabe 3.

Seien $E/\mathbb{Q}$ eine elliptische Kurve in Weierstraßform und $P \in E(\mathbb{Q})$.

(a) Zeigen Sie, dass der Limes
$$\hat{h}(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} h(2^n P)$$
in $\mathbb{R}$ existiert. (**Tipp:** Zeigen Sie, dass $\frac{1}{4^n} h(2^n P)$ eine Cauchy-Folge ist.)
Wir bezeichnen $\hat{h}(P)$ als die Néron-Tate-Höhe von P.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $\kappa = \kappa(a, b, c)$ gibt, so dass gilt:
$$|\hat{h}(P) - h(P)| \leq \kappa.$$

(c) Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\hat{h}(mP) = m^2 \hat{h}(P).$$

(d) Zeigen Sie, dass $\hat{h}$ eine quadratische Form definiert, d. h.

$$\langle\ ,\ \rangle : E(\mathbb{Q}) \times E(\mathbb{Q}) \to \mathbb{R}$$
$$\langle P, Q \rangle = \hat{h}(P+Q) - \hat{h}(P) - \hat{h}(Q)$$

ist eine symmetrische Bilinearform.

(e) Zeigen Sie:

1. $\hat{h}(P) \geq 0$,
2. $\hat{h}(P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P$ ist ein Torsionspunkt.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den 17.12.2014 in der Vorlesung. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/52095239/AEK-WS20145`
