Verallgemeinerung der Eigenwerte einer Matrix anhand eines Polynoms von C.R. Johnson

Ausgangspunkt nachfolgender Betrachtungen ist das paper von C.R. Johnson mit dem Titel „A Characteristic Polynomial for Matrix Pairs“ aus dem Jahr 1989. Johnson definiert dort den folgenden Operator:

Definition: Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Für $S \subset \{1, ..., n\}$ sei:

$$\eta(A, B) := \sum_S \det(A[S]) \det(B[S'])$$

Dabei bezeichnet S' das Komplement von S und $A[S]$ diejenige $|S| \times |S|$-Untermatrix von A, deren Zeilen- und Spaltenindex in S liegt. Es sei $\det(A[\emptyset]) = \det(B[\emptyset]) = 1$.

Für feste A und B ist dann $\eta(zA, -B)$ ein Polynom in der komplexen Variable z, dessen Nullstellen für $A = I$ mit den Eigenwerten von B übereinstimmen. In diesem Sinne können die Nullstellen von $\eta(zA, -B)$ als Verallgemeinerung der Eigenwerte von B aufgefasst werden. Johnson veröffentlichte in seinem paper drei Vermutungen über das Verhalten der Nullstellen dieses Polynoms, welche 2006 von Borcea, Bränden und Shapiro bewiesen wurden. Diese allgemeineren Resultate sollen zunächst wiedergegeben werden. Darüber hinaus betrachten wir das Nullstellenverhalten des Polynoms unter verschiedenen weiteren Gesichtspunkten. Wir untersuchen beispielsweise, inwiefern Zusammenhänge ähnlich den bekannten Tatsache vorliegen, dass aus den Eigenwerten einer Matrix auf deren Determinante und Spur geschlossen werden kann.