Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 15.04.2015
Abgabetermin: 22.04.2015

Kommutative Algebra

Übungsblatt 1

Auf jedem Übungsblatt ist, wenn nicht explizit anders angegeben, ein Ring immer kommutativ mit 1.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei K ein Körper.

1. Bestimme die maximalen Ideale im Ring K^n (Addition und Multiplikation komponentenweise definiert).
2. Finde ein Primdeal in $K[X, Y]$, das nicht maximal ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien R, S Ringe. Zeige:

1. $R[[X]]^\times = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[[X]] : a_0 \in R^\times\}$
2. Sei $f : R \twoheadrightarrow S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker(f) \subseteq \mathscr{N}(R)$. Dann gilt $f^{-1}(S^\times) \subseteq R^\times$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweise Satz 12 aus der Vorlesung: Sei I eine Menge und R_i ein Ring für alle $i \in I$. Dann gilt:

1. Das direkte Produkt $P := \prod_{i \in I} R_i$ zusammen mit den Projektionsabbildungen $\mathrm{pr}_i : P \to R_i$ ist ein Produkt der R_i.
2. Sind $(P, (p_i)_{i \in I})$ und $(Q, (q_i)_{i \in I})$ zwei Produkte der R_i, dann gibt es einen eindeutigen Ringisomorphismus $\varphi : P \to Q$, so dass $q_i \circ \varphi = p_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

1. Zeige, dass für das Jacobsonradikal eines Ringes R gilt:
$$\mathrm{Rad}(R) = \{a \in R : \ \forall b \in R : 1 - ab \in R^\times\}.$$
2. Sei K ein Körper und sei $f \in K[X]$. Beschreibe anhand der Primfaktorzerlegung von f das Nilradikal und das Jacobsonradikal des Quotientenrings $K[X]/(f)$.