Elementare Zahlentheorie

Blatt 1 — 16.04.2015

Aufgabe 1. (Teilbarkeit in ganzen Zahlen, 1,5+1,5+1 Punkte)

Es seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) $6|(n^3 - n)$.

(b) $7|(10m + n) \Leftrightarrow 7|(m - 2n)$.

(c) Ist n ungerade, so ist $8|(n^2 - 1)$.

Aufgabe 2. (euklidischer Algorithmus, 2+2 Punkte)

(a) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler d von 1604 und 2015 und finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$, so dass gilt:

$$1604x + 2015y = d.$$

(b) Die *Fibonacci-Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1,\ a_2 := 1 \text{ und } a_{n+2} := a_{n+1} + a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(a_{n+1}, a_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Wie viele Divisionen mit Rest muss man beim euklidischen Algorithmus zur Bestimmung von $\mathrm{ggT}(a_{n+1}, a_n) = 1$ durchführen?

Aufgabe 3. (ggT und kgV, 1+2+1 Punkte)

Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $d := \mathrm{ggT}(a, b)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{ggT}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

(b) Ist $a|c$ und $b|c$ so ist: $\frac{ab}{d}|c$.

(c) Ist $m = \mathrm{kgV}(a, b)$, so ist $|ab| = dm$.

— **bitte wenden** —

Aufgabe 4. (Zahlentheorie für Abergläubische, 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass es jedes Jahr höchstens drei und mindestens einen Freitag den Dreizehnten gibt. Zeigen Sie, ohne dem Kalender direkt zu entnehmen, dass die obere Schranke scharf ist, indem Sie davon ausgehen, dass der 16. April 2015 ein Donnerstag ist.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 23.04.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/54089776/Elementare_Zahlentheorie`
