Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 22.04.2015
Abgabetermin: 29.04.2015

Kommutative Algebra

Übungsblatt 2

Es bezeichne stets R einen Ring.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige:

1. Der Faktorring $R_{\mathrm{red}} := R/\mathscr{N}(R)$ ist ein reduzierter Ring.
2. Die Quotientenabbildung $R \to R_{\mathrm{red}}$ ist universell für Homomorphismen in reduzierte Ringe, d.h. für jeden reduzierten Ring A faktorisiert jeder Ringhomomorphismus $f : R \to A$ eindeutig über R_{red}.

Benutze die universelle Eigenschaft, um zu zeigen: Ist $R := k[X,Y]/(XY, Y^2)$, wobei k einen Körper bezeichnet, so gilt: $\mathscr{N}(R) = (Y)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei M ein R-Modul. Weiter seien N, N_1 und N_2 Untermoduln von M.

1. Zeige: Sind N und M/N endlich erzeugte R-Moduln, so ist auch M endlich erzeugt.
2. Zeige: Sind $N_1 + N_2$ und $N_1 \cap N_2$ endlich erzeugte R-Moduln, so gilt dies auch für N_1 und N_2.
3. Finde ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung der obigen Aussage im Allgemeinen nicht gilt.
   Hinweis: Betrachte $R := \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f(0) \in \mathbb{Q}\}$ und $M := \mathbb{C}[X]$ als R-Modul. Es gibt ein Beispiel, in dem N_1 und N_2 jeweils von einem Element erzeugt werden.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien M_1, M_2 und N Moduln über R. Für jedes $i = 1, 2$ sei $f_i : M_i \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Das **Faserprodukt** von M_1 und M_2 über N ist ein R-Modul $M_1 \times_N M_2$ zusammen mit R-Modulhomomorphismen $p_i : M_1 \times_N M_2 \to M_i$ für $i = 1, 2$, so dass $f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$ und folgende universelle Eigenschaft gilt:

Ist M ein weiterer R-Modul und sind $g_i : M \to M_i$ für $i = 1, 2$ zwei R-Modulhomomorphismen derart, dass $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$, so gibt es genau einen R-Modulhomomorphismus $g : M \to M_1 \times_N M_2$, so dass $p_i \circ g = g_i$ für alle $i = 1, 2$, oder mit anderen Worten; so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, dashed, "\exists! g"] \arrow[ddr, "g_1"'] \arrow[drr, "g_2"] & & \\
& M_1 \times_N M_2 \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\
& M_1 \arrow[r, "f_1"] & N.
\end{tikzcd}$$

Zeige:

$$M_1 \times_N M_2 = \ker(f_1 - f_2 : M_1 \oplus M_2 \to N).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei M ein R-Modul und sei $(N_\lambda)_{\lambda \in I}$ eine Familie von R-Moduln. Zeige: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\bigoplus_{\lambda \in I} (M \otimes_R N_\lambda) \xrightarrow{\sim} M \otimes_R \left(\bigoplus_{\lambda \in I} N_\lambda \right).$$

Folgere daraus: Ist M ein freier R-Modul und $R \to S$ eine R-Algebra, so ist $M \otimes_R S$ ein freier S-Modul.