Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 29.04.2015
Abgabetermin: 03.05.2015

Kommutative Algebra

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $d = \mathrm{ggT}(m, n)$. Zeige

1. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (0)$ und
2. $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f : A \to B$ eine A-Algebra, $M = A^n$ der freie A-Modul vom Rang $n \in \mathbb{N}$ und N ein A-Modul. Zeige, dass $\varphi \otimes 1 \mapsto \varphi \otimes \mathrm{id}$ einen B-Modulisomorphismus

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \otimes_A B \cong \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B)$$

induziert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(*Konstruktion eines Gegenbeispiels zu Aufgabe 2, falls M nicht frei ist.*)
Sei K ein Körper und $R = K[X, Y]/(XY, Y^2)$. Sei weiter K als R-Algebra gegeben durch

$$f : R \to K, \quad [\sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j] \mapsto a_{00}.$$

Zeige, dass der durch $\varphi \otimes 1 \mapsto \varphi \otimes \mathrm{id}$ definierte K-Modulhomomorphismus

$$\mathrm{Hom}_R(f_*K, R) \otimes_R K \to \mathrm{Hom}_K(f_*K \otimes_R K, R \otimes_R K)$$

weder injektiv noch surjektiv ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei R ein Ring und $\det : R^2 \times R^2 \to R$ die Determinantenabbildung. Da diese bilinear ist, faktorisiert sie eindeutig über $R^2 \otimes_R R^2$ durch

$$g : R^2 \otimes_R R^2 \to R.$$

Sei weiter v_1, v_2 eine R-Basis von R^2. Finde in Abhängigkeit von v_1, v_2 ein endliches Erzeugendensystem von $\ker(g)$.