Elementare Zahlentheorie

Blatt 3 — 30.04.2015

Aufgabe 9. (Primzahlen und Kongruenzen, 1+1+2 Punkte)

Seien p, q verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie:

(a) $(p-2)! \equiv 1 \mod p$,

(b) Ist $p = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}$, so gilt: $1^2 \cdot 3^2 \cdot \cdots \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{k+1} \mod p$,

(c) $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \mod pq$.

Aufgabe 10. (kubische Reste und Diophantische Gleichung, 1+3 Punkte)

Manchmal ist es nützlich, eine Diophantische Gleichung modulo einer geeigneten natürlichen Zahl n zu betrachten, um festzustellen, ob sie ganzzahlige Lösungen besitzen kann. Dies zeigt folgendes Beispiel:

(a) Bestimmen Sie alle möglichen kubischen Reste modulo 7 und 9.

(b) Zeigen Sie, dass die Diophantische Gleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2012$$

keine ganzzahligen Lösungen besitzt.

Aufgabe 11. (Anwendung der Kongruenzen, 4 Punkte)

Bestimmen Sie den Rest folgender ganzzahligen Divisionen:

(a) 20! durch 23,

(b) 2^{95} durch 47,

(c) 3^{69} durch 71,

— bitte wenden —

Aufgabe 12. (lineare Kongruenzensysteme, 4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$ folgender Kongruenzensysteme:

(a) $$\begin{cases} 9x + 8y \equiv 13 \mod 20 \\ 6x + 7y \equiv 12 \mod 20 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x + 2y \equiv 4 \mod 15 \\ 5x + 7y \equiv 10 \mod 15 \end{cases}$$

Hinweis: Wenden Sie den Gauß-Algorithmus an. Beachten Sie dabei, dass die Zeilen der erweiterten Matrix nicht mit manchen ganzen Zahlen multipliziert bzw. durch manche ganze Zahlen dividiert werden dürfen!

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 07.05.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/54089776/Elementare_Zahlentheorie`