Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 6.5.2015
Abgabetermin: 13.5.2015

Kommutative Algebra

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: Baer Summe (8 Punkte)

Seien $0 \to A \stackrel{\iota_1}{\to} B_1 \stackrel{\pi_1}{\to} C \to 0$ und $0 \to A \stackrel{\iota_2}{\to} B_2 \stackrel{\pi_2}{\to} C \to 0$ zwei kurze exakte Sequenzen von R-Moduln. Sie sind *äquivalent* wenn ein Isomorphismus $\varphi : B_1 \to B_2$ existiert, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & C \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ A \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. dieser Äquivalenzrelation bezeichnen wir mit $\mathrm{Ext}_R(C, A)$.

i) Sei $B_1 \times_C B_2$ das Faserprodukt von B_1 und B_2 über C mit $f_i = \pi_i$ (siehe Aufgabe 3 von Blatt 2). Sei $\iota : A \to B_1 \times_C B_2$ der Modulhomomorphismus gegeben durch die universelle Eigenschaft des Faserprodukts für $g_1 = \iota_1$ und $g_2 = -\iota_2$. Zeige, dass

$$0 \to A \stackrel{\tilde{\iota}}{\to} (B_1 \times_C B_2)/\iota(A) \stackrel{\tilde{\pi}}{\to} C \to 0$$

eine exakte Sequenz ist. Dabei bezeichne $\tilde{\pi}$ die natürliche Abbildung und $\tilde{\iota}$ den Homomorphismus gegeben durch die universelle Eigenschaft des Faserprodukts für $g_1 = \iota_1$ und $g_2 = 0$. Dieser Modul heißt *Baer Summe* dieser exakten Sequenzen.

ii) Zeige, dass die Summe auf $\mathrm{Ext}_R(C, A)$ wohldefiniert ist.

iii) Zeige, dass die Baer Summe kommutativ ist.

iv) Zeige, dass die Klasse von $0 \to A \stackrel{i_A}{\to} A \oplus C \stackrel{\pi_C}{\to} C \to 0$ ein Neutrales Element für die Baer Summe auf $\mathrm{Ext}_R(C, A)$ ist.

v) Zeige, dass die Inverse der Klasse von $0 \to A \stackrel{\iota}{\to} B \stackrel{\pi}{\to} C \to 0$ bzgl. der Baer Summe die Klasse von $0 \to A \stackrel{-\iota}{\to} B \stackrel{\pi}{\to} C \to 0$ ist.

vi) Zeige, dass die Menge $\mathrm{Ext}_R(C, A)$ zusammen mit der Baer Summe eine kommutative Gruppe bildet.

vii) Sei p ein Primzahl. Zeige, dass $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ isomorph zu $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ist.

Hinweis: Es gibt genau zwei Gruppen der Ordnung p^2, und zwar $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$ und $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$. Es gibt genau eine Gruppe der Ordnung p.

Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 6.5.2015
Abgabetermin: 13.5.2015

Aufgabe 2: Schlangenlemma (4 Punkte)

Sei N ein R-Modul und $h \in R$. Wir bezeichnen mit $N[h]$ den R-Untermodul von N gegeben durch $\{n \in N; hn = 0\}$.
Sei M ein R-Modul und seien $f, g \in R$, so dass f kein Nullteiler ist. Finde mithilfe des Schlangenlemmas einen Homomorphismus

$$\delta : R/(f)[g] \to R/(g),$$

sodass die Sequenz

$$R[g] \xrightarrow{\cdot f} R[g] \to R/(f)[g] \xrightarrow{\delta} R/(g) \xrightarrow{\cdot f} R/(g) \to R/(f,g)$$

exakt ist.

Aufgabe 3: Projektive Moduln (4 Punkte)

i) Sei $R = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ und $\mathbf{Z}$ der R-Modul definiert als der erste Term der Summe. Zeige, dass $\mathbf{Z}$ zwar kein freier R-Modul ist, aber ein projektiver R-Modul ist.

ii) Zeige, dass der $\mathbf{Z}$-Modul $\mathbf{Q}$ nicht projektiv ist.

iii) Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R. Dann ist der R-Modul $R/\mathfrak{a}$ projektiv genau dann wenn ein Homomorphismus $\phi : R/\mathfrak{a} \to R$ existiert, sodass $\pi \circ \phi = Id$.