

Übungen zur Vorlesung Grundlagen der Algebra
Übungsblatt 3

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya

11.05.2014

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Teilmenge. Man definiert den Normalisator von H in G als

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $N_G(H)$ ist eine Untergruppe von G

(b) ist $H < G$ eine Untergruppe, so ist H ein Normalteiler von $N_G(H)$

(c) in der Situation von (b) gilt: jede Untergruppe $U < G$, mit der Eigenschaft, dass H ein Normalteiler von U ist, ist in $N_G(H)$ enthalten.

(Das bedeutet $N_G(H)$ ist die größte Untergruppe von G , in der H ein Normalteiler ist)

Übung 2 (4 Punkte)

Seien G, H Gruppen. Zeigen Sie: ein bijektiver Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ ist automatisch ein (Gruppen-)Isomorphismus, das heißt es existiert ein Homomorphismus $\psi : H \rightarrow G$ mit $\varphi \circ \psi = \text{id}_H$ und $\psi \circ \varphi = \text{id}_G$. In dieser Situation sagt man G ist isomorph zu H und schreibt $G \cong H$.

Übung 3 (4 Punkte)

Die Matrizen in $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ mit Determinante 1 bilden eine Untergruppen von $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, die mit $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ bezeichnet wird. Man zeige

(a) $\text{GL}_3(\mathbb{R}) \cong \text{SL}_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times$

(b) $\text{GL}_2(\mathbb{R}) \not\cong \text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times$

(man betrachte für Teil (b) zum Beispiel die Elemente der Ordnung 2 in beiden Gruppen).

Übung 4 (4 Punkte)

Man betrachte das Quadrat $Q \subset \mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ und $(0, -1)$ und folgende Gruppe

$$D_4 := \{A \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ bildet } Q \text{ auf sich selbst ab}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass D_4 genau 8 Elemente hat

(b) Finden Sie Elemente $S, T \in D_4$ so, dass

$$D_4 = \{E, T, T^2, T^3, S, ST, ST^2, ST^3\}$$

ist, wobei E die Einheitsmatrix bezeichne.

(c) Zeigen Sie, dass D_4 nicht abelsch ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Mittwoch, den 20.5.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.