Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 13.5.2015
Abgabetermin: 20.5.2015

Kommutative Algebra

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: Gerichter Multigraph (3 Punkte)

Sei Γ der gerichtete Multigraph mit zwei Ecken 0 und 1 und zwei Kanten σ und τ von 0 nach 1.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\sigma"] \arrow[r, bend right, "\tau"'] & 1 \end{tikzcd}$$

Zeige, dass die Kategorie der Γ-Diagramme in Mengen

$$\mathsf{sets}^{\Gamma} = \mathrm{Fun}(\Gamma, \mathsf{sets})$$

äquivelent zur Kategorie der gerichteten Multigraphen ist.

Aufgabe 2: Mono- und Epimorphismus (5 Punkte)

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Morphismus $f : A \to B$ ist ein *Monomorphismus*, wenn für alle g_1 und $g_2 \in \mathrm{Hom}(C, A)$ die Gleichung $fg_1 = fg_2$ die Gleichung $g_1 = g_2$ impliziert. Ein Morphismus $f : A \to B$ ist ein *Epimorphismus*, wenn für alle g_1 und $g_2 \in \mathrm{Hom}(B, C)$ die Gleichung $g_1 f = g_2 f$ die Gleichung $g_1 = g_2$ impliziert.

i) Sei f ein Morphismus in der Kategorie der Mengen Set. Zeige, dass f genau dann mono (bzw. epi) ist, wenn f injektiv (bzw. surjektiv) ist.

ii) Zeige, dass in der Kategorie der Ringe Ring die Monomorphismen genau die injektiven Ringhomomorphismen sind.

Hinweis: Sei $f : A \to B$ ein nicht injektiver Homomorphismus. Man kann das Faserprodukt $A \times_B A$ betrachten.

iii) Zeige, dass Epimorphismen in der Kategorie der Ringe existieren, die nicht surjektiv sind.

iv) Sei Top die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen. Finde einen Morphismus $f : X \to Y$ der mono und epi ist, aber für den kein Morphismus $g : Y \to X$ existiert, sodass die Gleichung $gf = \mathrm{Id}_X$ gilt.

Aufgabe 3: Produkt (4 Punkte)

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ ist *initial* (bzw. *terminal*), falls für alle Objekte X in $\mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{Hom}(A, X)$ (bzw. $\mathrm{Hom}(X, A)$) aus genau einem Element besteht. Ein Element, das gleichzeitig initial und terminal ist, heißt *Nullobjekt*. Seien A_1, A_2 zwei Objekte in $\mathcal{C}$. Ein *Produkt* von A_1 und A_2 ist ein Objekt $A_1 \times A_2$ in $\mathcal{C}$ mit zwei Morphismen $p_i : A_1 \times A_2 \to A_i$, sodass für alle Paare von Morphismen $f_i : X \to A_i$ ein eindeutiger Morphismus $f \in \mathrm{Hom}(X, A_1 \times A_2)$ existiert, sodass die Gleichungen $p_i f = f_i$ gelten.

i) Sei Set die Kategorie der Mengen. Zeige, dass das Kartesische Produkt ein Produkt in dieser Kategorie ist.

ii) Finde alle initialen (bzw. terminalen) Objekte in Set. Folge, dass Set kein Nullobjekt besitzt.

iii) Zeige, dass es in der Kategorie der Körper kein Produkt gibt.

iv) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit terminalem Objekt A und einem Produkt $\times$. Zeige, dass für alle $X \in \mathcal{C}$ die Beziehung $X \times A \cong X \cong A \times X$ gilt.

Aufgabe 4: Gruppenobjekte (4 Punkte)

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem Produkt $\times$ und einem terminalen Objekt $*$. Für $G \in \mathcal{C}$ definieren wir die diagonale Einbettung $\Delta : G \to G \times G$ und den eindeutigen Homomorphismus $\pi : G \to *$ (siehe Aufgabe 3). Ein *Gruppenobjekt* (G, μ, i, e) in $\mathcal{C}$ ist ein Objekt G zusammen mit drei Morphismen

$$\mu : G \times G \to G, \ i : G \to G \text{ und } e : * \to G$$

und folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \mu(\mu \times \mathrm{Id}) &= \mu(\mathrm{Id} \times \mu) \text{ (Assoziativität)} \\ \mu(i \times \mathrm{Id})\Delta &= \mu(\mathrm{Id} \times i)\Delta = e\pi \text{ (Inverse)} \\ \mu(\mathrm{Id} \times e) &= \mu(e \times \mathrm{Id}) = \mathrm{Id} \text{ (neutrales Element).} \end{aligned}$$

i) Sei G ein Gruppenobjekt und X ein Objekt von $\mathcal{C}$. Dann induzieren μ, e und i auf $\mathrm{Hom}(X, G)$ eine funktorielle Gruppenstruktur. Zeige, dass der so definierte Funktor $\mathrm{Hom}(\_, G) : \mathcal{C} \to \mathsf{Grp}$ den gewöhnlichen Funktor $\mathrm{Hom}(\_, G) : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ über den Vergissfunktor $\mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ faktorisiert.

ii) Zeige, dass eine Faktorisierung von $\mathrm{Hom}(\_, G)$ über die Kategorie der Gruppen wie in (i) die Struktur eines Gruppenobjekts auf G definiert.

iii) Zeige, dass ein Gruppenobjekt in Set ein Gruppe ist.

iv) Zeige, dass ein Gruppenobjekt in Grp ein Abelsche Gruppe ist.