Elementare Zahlentheorie

Blatt 5 — 14.05.2015

Aufgabe 17. (Teilersumme und vollkommene Zahlen, 1+3 Punkte)

(a) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

(b) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt **vollkommen**, wenn $\sigma(n) = 2n$ gilt. Beispielsweise ist 6 eine vollkommene Zahl, denn es gilt:

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \cdot 6.$$

Zeigen Sie: Eine gerade Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann vollkommen, wenn

$$n = 2^{m-1}(2^m - 1)$$

für ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $2^m - 1$ eine Primzahl ist.

Bemerkung – Man weiß nicht, ob es ungerade vollkommene Zahlen gibt. Jedenfalls ist keine bekannt und man kann auch nicht beweisen, dass es keine solchen gibt.

Aufgabe 18. (Zahlentheoretische Funktionen, 2+2 Punkte)
Es sei n eine natürliche Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass für jede multiplikative Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ prim}}} (1 - f(p)).$$

Folgern Sie: $\displaystyle \frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ prim}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$

(b) Zeigen Sie: $\sum_{d|n} \tau(n)^3 = \left(\sum_{d|n} \tau(n)\right)^2$

—— bitte wenden ——

Aufgabe 19. (Anwendung des Chinesischen Restsatzes, 4 Punkte)
Der Kleinstaat Fabelland mit 23210 Einwohnern hat eine eigene Armee. Bei Paraden wird in 10er-Reihen marschiert, dann ist vorne das 5-köpfige Musikkorps. Beim jährlichen Manöver gehen alle in 9er-Reihen, und es bleiben genau drei Mann zum Ziehen der einzigen Kanone von Fabelland übrig. Als einmal hoher Staatsbesuch kam, stellte man sich in 13er-Reihen vor dem Bahnhof auf, wobei der General und der Trompeter an der Spitze waren.

Bekanntlich beträgt die Größe der Armee mindestens 1000. In der Verfassung des Landes steht jedoch, dass höchstens 10% der Einwohner von Fabelland in der Armee sein dürfen. Wie viele Soldaten hat Fabelland?

Aufgabe 20. (Wilson für Primzahlzwillinge, 4 Punkte)
Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $n \geq 3$ ungerade, ein $a \in \{0, 1, 2, \ldots, n(n+2) - 1\}$, so dass gilt:

$$(n, n+2) \text{ ist ein Primzahlzwilling} \quad \Leftrightarrow \quad -4(n-1)! \equiv a \mod n(n+2).$$

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 21.05.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/54089776/Elementare_Zahlentheorie`
