Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 20.5.2015
Abgabetermin: 27.5.2015

Kommutative Algebra

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Saturierte Teilmenge (4 Punkte)

Sei R ein Ring. Eine Untermenge $T \subset R$ heißt *saturiert*, wenn $xy \in T$ impliziert, dass x und y in T enthalten sind. Sei S eine multiplikative Teilmenge von R.

i) Zeige, dass S genau dann saturiert ist, wenn $R \setminus S$ eine Vereinigung von Primidealen ist.

   Hinweis: Verwende Proposition 2.39 (oder 3.10 in der neue Fassung) aus der Vorlesung.

ii) Sei $\tilde{S} := \{x \in R : \exists y \in R, xy \in S\}$. Zeige, dass $\tilde{S}$ die kleinste saturierte Teilmenge von R ist, die S enthält.

iii) Zeige, dass $R \backslash \tilde{S}$ die Vereinigung der Primideale von R ist, deren Schnitt mit S leer ist.

iv) Zeige, dass der Morphismus $S^{-1}R \to \tilde{S}^{-1}R$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2: Lokalisierung: Beispiele (5 Punkte)

i) Sei $m \in \mathbf{Z}$ von Null verschieden. Berechne die Lokalisierung des $\mathbf{Z}$-Moduls $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ am Multiplikativen System $\{1, m, m^2, \cdots\}$.

ii) Seien $R = \mathbf{C}[X]$ und $\mathfrak{p} = (X)$. Beschreibe R_X und $R_{\mathfrak{p}}$.

Sei R ein Ring und S eine multiplikative Teilmenge von R.

iii) Zeige, dass $(S^{-1}R)[X] = S^{-1}(R[X])$.

iv) Zeige, dass $(S^{-1}R)[[X]] \neq S^{-1}(R[[X]])$.

Aufgabe 3: Nakayama: Korollar (3 Punkte)

i) Seien R ein Ring, M endlich erzeugter R-Modul und φ ein R-Endomorphismus von M. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn φ ein Isomorphismus ist.

ii) Angenommen sei es existiert $n \geq m \in \mathbf{N}$, sodass R^n mit R^m isomorph ist. Zeige, dass jede Projektion $\pi : R^n \to R^m$ ein Isomorphismus ist. Folge, dass $n = m$ gilt.

Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 20.5.2015
Abgabetermin: 27.5.2015

Aufgabe 4: Lokalisierung (4 Punkte)

Sei R ein Ring und S eine multiplikative Teilmenge von R. Das Nilradikal von R ist $\mathcal{N}(R)$.

i) Zeige, dass $\mathcal{N}(S^{-1}R) = S^{-1}(\mathcal{N}(R))$.

ii) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) R ist reduziert.

(2) $R_{\mathfrak{p}}$ ist reduziert für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R.

(3) $R_{\mathfrak{m}}$ ist reduziert für alle Maximalideale $\mathfrak{m}$ von R.