Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 27.05.2015
Abgabetermin: 03.06.2015

Kommutative Algebra

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei R ein Ring. Eine R-Algebra $R \to A$ heißt *endlich erzeugt*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Ideal $\mathfrak{a}$ in $R[X_1, ...X_n]$ gibt, so dass sie isomorph zu

$$R \to R[X_1, ...X_n]/\mathfrak{a}, \quad r \mapsto r \bmod \mathfrak{a}$$

ist. Eine endlich erzeugte R-Algebra heißt *endlich präsentiert*, wenn $\mathfrak{a}$ als Ideal endlich erzeugt ist. Zeige, dass für eine endlich präsentierte R-Algebra $R \to A$ und eine beliebige R-Algebra $R \to S$ gilt:

$$S \to S \otimes_R A, \quad s \mapsto s \otimes 1$$

ist eine endlich präsentierte S-Algebra.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien R ein Ring und $f, g \in R$. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

1. $D(f) \subseteq D(g)$
2. Das Bild von g unter der Lokalisierungsabbildung ist eine Einheit in R_f.
3. Es gibt einen eindeutigen R-Algebrahomomorphismus $R_g \to R_f$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein Ring und sei $\mathcal{A}(R)$ die Menge aller $V(\mathfrak{a})$ für Ideale $\mathfrak{a}$ von R. Zeige, dass $\mathcal{A}(R)$ die Axiome für abgeschlossene Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec}(R)$ erfüllt, also dass gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}(R)$ und $\operatorname{Spec}(R) \in \mathcal{A}(R)$.
2. Sind $V_1, V_2 \in \mathcal{A}(R)$, dann ist auch $V_1 \cup V_2 \in \mathcal{A}(R)$.
3. Sind $V_i \in \mathcal{A}(R)$ für alle $i \in I$, dann ist auch $\bigcap\limits_{i \in I} V_i \in \mathcal{A}(R)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}_K(V)$. Für alle $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ und $v \in V$ definieren wir

$$P \cdot v := \sum_{i=0}^n a_i f^i(v),$$

mit $f^0 := \operatorname{id}_V$ und $f^n := f \circ ... \circ f$ (n-mal) für $n \geq 1$. Dies definiert eine $K[X]$-Modulstruktur auf V. Zeige

$$\operatorname{supp}(V) = \{(X - a) : a \text{ ist ein Eigenwert von } f\}.$$