Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 3.6.2015
Abgabetermin: 10.6.2015

Kommutative Algebra

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien k ein Körper und $R = \prod_{n \in \mathbf{N}} k$.

i) Bestimme die Menge der Idempotenten von R (i.e. Elemente $e \in R$, sodass $e^2 = e$ gilt).

ii) Jedes Ideal wird durch die in ihm enthaltenen Idempotenten erzeugt.

iii) Jedes Primideal von R ist maximal und minimal.

iv) $R_{\mathfrak{p}}$ ist reduziert.

v) $R_{\mathfrak{p}}$ ist ein Körper, also noethersch.

vi) R ist nicht noethersch.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei R ein Ring mit Nilradikal $\mathcal{N}(R)$ und Jacobsonradikal $\mathcal{J}(R)$. Zeige:

i) Die folgenden Aussagen sind Äquivalenz.

   1. Jedes Primideal ist ein Schnitt von Maximalidealen.
   2. Für jeden Quotienten S von R gilt $\mathcal{N}(S) = \mathcal{J}(S)$.

   Ein Ring, der diese Eigenschaften erfüllt heißt *Jacobsonring.*

ii) $\mathbf{C}[X_1, \cdots, X_n]$ ist ein Jacobsonring.

iii) Die Länge eines $\mathbf{C}[X_1, \cdots, X_n]$-Moduls M ist gleich $\dim_{\mathbf{C}}(M)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{A}^1(\mathbf{C})$ die affine Gerade über $\mathbf{C}$.

i) Seien J eine endliche Menge und $a_j \in \mathbb{A}^1(\mathbf{C})$ für alle $j \in J$. Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{j \in J} a_j$ eine $\mathbf{C}$-algebraische Menge in $\mathbb{A}^1(\mathbf{C})$ ist.

ii) Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{a \in \mathbf{Z}} a$ keine $\mathbf{C}$-algebraische Menge in $\mathbb{A}^1$ ist. Berechne $V\left(I(\bigcup_{a \in \mathbf{Z}} a)\right)$ in $\mathbb{A}^1(\mathbf{C})$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien I, J zwei Ideale von $\mathbf{C}[X_1, \cdots, X_n]$. Zeige, dass $I \subset \sqrt{J}$ die Existenz eines $m \in \mathbf{N}$ mit der Eigenschaft $I^m \subset J$ impliziert.
Finde einen Ring R und zwei Ideale I und J, so dass $I \subset \sqrt{J}$ gilt, aber kein $m \in \mathbf{N}$ existiert, sodass $I^m \subset J$ gilt.