Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 10.06.2015
Abgabetermin: 17.06.2015

Kommutative Algebra

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $R \neq (0)$ ein Hauptidealring, der kein Körper ist. Zeige, dass R als R-Modul keine Kompositionsreihe besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei R ein unendlicher Integritätsring mit endlicher Einheitengruppe $R^{\times}$. Zeige, dass $\mathrm{Specmax}(R)$ unendlich viele Elemente hat.

(*Tipp: Folgere aus der Endlichkeit von Specmax*(R)*, dass R endliche Länge hat.*)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein artinscher Ring und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Zeige, daß für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ der Quotient $R \to R/\mathfrak{p}^n$ mit der Lokalisierung $R \to R_{\mathfrak{p}}$ übereinstimmt.

(*Tipp: Struktursatz für Artinsche Ringe*)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei k ein Körper und A eine endlich erzeugte k-Algebra. Zeige, dass A als k-Vektorraum genau dann endlichdimensional ist, wenn $\mathrm{Specmax}(A)$ eine endliche Menge ist.

(*Tipp: Für die Rückrichtung die durch* $\mathcal{N}(A)^i$ *induzierte Filtrierung von A betrachten.*)