Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 17.06.2015
Abgabetermin: 24.06.2015

Kommutative Algebra

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige: Jeder Ring ist die Vereinigung noetherscher Ringe.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f \neq 0$ ein Element eines noetherschen Integritätsrings R und R_f die Lokalisierung am System der Potenzen von f.

i) Beweise die Abschätzungen

$$1 + \dim R_f \geq \dim R \geq \dim R_f.$$

(*Tipp: Seien* $\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_2$ *Primideale in* R *mit* $f \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_0$, *so dass es ein Primideal* $\mathfrak{p}_1$ *mit* $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ *gibt. Zeige, dass es ein Primideal* $\mathfrak{p}_1'$ *gibt mit* $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1' \subsetneq \mathfrak{p}_2$ *und* $f \notin \mathfrak{p}_1'$.)

ii) Zeige anhand von Beispielen (eventuell mit verschiedenen R's), dass die beiden Schranken angenommen werden.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimme die Mengen $\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ und $\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

ii) Sei M ein Modul über einem Ring R. Weiter seien $M_1, M_2 \subseteq M$ zwei Untermoduln und $M' := M_1 \cap M_2$. Zeige:

$$\mathrm{Ass}_R(M/M') \subseteq \mathrm{Ass}_R(M/M_1) \cup \mathrm{Ass}_R(M/M_2).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher Ring. Weiter seien M, N endlich erzeugte R-Modul. Zeige:

$$\mathrm{Ass}_R(\mathrm{Hom}_R(M, N)) = \mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{Ass}_R(N).$$

(*Tipp: Reduziere zunächst auf den Fall* R *lokal und* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$ *maximal. Überlege dabei, dass es einen surjektiven* R*-Homomorphismus* $M \to R/\mathfrak{p}$ *gibt, falls* $\mathfrak{p} \in \mathrm{supp}(M)$.)