Elementare Zahlentheorie

Blatt 10 — 18.06.2015

Aufgabe 36. (Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}[i]$, 2+2 Punkte)

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Ring $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gauß'schen Zahlen faktoriell ist. Daher können wir – wie in $\mathbb{Z}$ – zu jedem Primelement $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ die Abbildung $v_\pi : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$ definieren durch

$$\begin{aligned} v_\pi(x) &:= \text{Anzahl der Faktoren } \pi \text{ in der Primfaktorzerlegung von } x \\ &= \max\{v \in \mathbb{N}_0 \,:\, \pi^v \mid x\} \end{aligned}$$

für jedes $x \in \mathbb{Z}[i]$. Darauf basierend können wir $v_{1+i}(10)$ auf folgenden zwei verschiedenen Weisen bestimmen:

- In der Primfaktorzerlegung $10 = 2 \cdot 5 = (1+i)(1-i)(1+2i)(1-2i)$ kommt $1+i$ genau einmal vor, d.h. $v_{1+i}(10) = 1$.
- Aus $(1+i)^2 \mid 10$ und $(1+i)^3 \nmid 10$, folgt aber $v_{1+i}(10) = 2$!?!!

Wo liegt der Fehler?

(b) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $7 + 74i \in \mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 37. (Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, 2+2 Punkte)
Wir betrachten den Ring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] := \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

(a) Zeigen Sie: Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ist ein euklidischer Ring bezüglich der Normabbildung

$$N : \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \to \mathbb{N}_0,\ N(a + b\sqrt{-2}) := (a + b\sqrt{-2})(a - b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2 \text{ für } a, b \in \mathbb{Z}$$

als euklidische Normfunktion.

(b) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ einen größten gemeinsamten Teiler d von $x := 5 - 2\sqrt{-2}$ und $y := 1 + 4\sqrt{-2}$.
Zusatzfrage (ohne Wertung): Vergleichen Sie $N(d)$ mit $\mathrm{ggT}(N(x), N(y))$. Warum stimmen sie nicht überein, obwohl die Normabbildung N multiplikativ ist?

— bitte wenden —

Aufgabe 38. (Diophantische Gleichung, 4 Punkte)
Finden Sie die ganzzahligen Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$x^2 + 2 = y^3.$$

Hinweis: Aus der Aufgabe 37 folgt, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ euklidisch und somit faktoriell ist.

Aufgabe 39. (1+1+2 Punkte)
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine ungerade Primzahl. Zeigen Sie:

(a) Ist $\pi \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein Primteiler von p, so ist $N(\pi) \in \{p, p^2\}$, wobei $N : \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \to \mathbb{N}_0$ die Normabbildung wie in der Aufgabe 37 bezeichnet.

(b) Ist π wie im Teil (a) und $a \in \mathbb{Z}$ derart, dass $a^2 \equiv -2 \bmod p$, so ist $\pi \mid a + \sqrt{-2}$ oder $\pi \mid a - \sqrt{-2}$

(c) Es existieren $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + 2y^2 = p$ genau dann, wenn $p \equiv 1$ oder $3 \bmod 8$.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 25.06.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/54089776/Elementare_Zahlentheorie`