Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 01.07.2015
Abgabetermin: 08.07.2015

Kommutative Algebra

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $R \neq \{0\}$ ein Hauptidealring, $p \in R$ prim und M ein R-Modul mit

$$M \cong R/(p) \oplus R/(p^2). \tag{1}$$

Zeige, dass die möglichen R-Modulisomorphismen (1) durch die Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a \in (R/(p)) \setminus \{0\}$, $b \in (pR)/(p^2)$, $c \in R/(p)$ und $d \in (R/(p^2)) \setminus ((pR)/(p^2))$ parametrisiert werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien K ein Körper, $R = K[X, Y]$ und $F = R$ der freie R-Modul vom Rang 1. Finde einen R-Untermodul von F, der nicht frei ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein Hauptidealring und seien F, M zwei R-Moduln, wobei F frei von endlichem Rang und M torsionsfrei sei sowie

$$\varphi : F \to M$$

ein R-Modulhomomorphismus. Zeige:
i) Es gibt einen freien Untermodul F' von F mit

$$F = \ker(\varphi) \oplus F'.$$

ii) Ist M ebenfalls frei von endlichem Rang, dann gibt es eine Basis $\{x_1, ..., x_r\}$ von F, eine Basis $\{y_1, ..., y_s\}$ von M, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in R \setminus \{0\}$ mit $n \leq \min\{r, s\}$ und $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$ für alle $i \in \{1, ..., n-1\}$, sodass gilt:

$$\varphi(x_i) = \begin{cases} \alpha_i y_i & \text{falls } i \leq n \\ 0 & \text{falls } i > n \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q}[X])$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} X^3 + X^2 - X - 1 & X^2 + X - 2 & X - 1 & X^4 + X^3 - X^2 - X \\ X^3 + X^2 - 2X & X^2 + X - 2 & 0 & 2X^4 + X^3 - 2X^2 - 1 \\ X^3 - 1 & X^2 - 1 & X - 1 & X^4 - X \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Elementarteilerform $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_s \\ & & \end{pmatrix}$, $d_1 | ... | d_s \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$, von A.