Elementare Zahlentheorie
Blatt 12 — 02.07.2015

Aufgabe 45. (2 Punkte)

i) Stellen Sie $-\frac{6}{17}$ als Kettenbruch mit ganzen Zahlen dar.

ii) Bestimmen Sie den Wert von $[1, 2, 3, 4, 5]$.

ii) Stellen Sie $\sqrt{7}$ als Kettenbruch mit ganzen Zahlen dar.

iv) Bestimmen Sie den Wert von $[5, 5, 5, \cdots]$.

Aufgabe 46. (2 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit Kettenbruchentwicklung $x = [a_0, a_1, \cdots]$. Sei $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der Näherungsbrüche von x. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| > \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe 47. (1+2+2 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit Kettenbruchentwicklung $x = [\overline{a_0, a_1, \cdots, a_n}]$ (der rein periodische Kettenbruch mit Periode $a_0, \cdots, a_n$) und $a_0 \neq 0$. Sei $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der Näherungsbrüche von x.

i) Zeigen Sie, dass

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0]$$

und

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1]$$

gelten.

ii) Zeigen Sie, dass x eine Wurzel des Polynoms $q_nX^2 - (p_n - q_{n-1})X - p_{n-1}$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie Lemma 14.4 wie im Beweis von Theorem 14.5.

iii) Sei $y := [\overline{a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0}]$. Zeigen Sie mit Hilfe von i), dass $-\frac{1}{y}$ die andere Wurzel des Polynoms $q_n X^2 - (p_n - q_{n-1})X - p_{n-1}$ ist.

Aufgabe 48. (1+2+2+1 Punkte)

Seien $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ mit $1 < b_1 < b_0$. In dieser Aufgabe berechnen wir die Kettenbruchentwicklung von $\log_{b_0}(b_1)$.

i) Zeigen Sie, dass eine ganze Zahl n_1 existiert, sodass die Ungleichung

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}$$

gilt.

ii) Zeigen Sie, dass b_i und n_i für alle $i \in \mathbb{N}$ existieren, sodass die Ungleichungen

$$b_{i+1}^{n_{i+1}} < b_i < b_{i+1}^{n_{i+1}+1}$$

gelten.

Hinweis: Die Zahl b_{i+1} ist durch $b_{i+1} = \frac{b_{i-1}}{b_i^{n_i}}$ definiert.

iii) Folgern Sie, dass die Kettenbruchentwicklung von $\log_{b_0}(b_1)$ durch $[0, n_1, n_2, \cdots]$ gegeben ist.

iv) Berechnen Sie n_1 und n_2 für $b_0 = 10$ und $b_1 = 2$.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 09.07.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Strae 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/54089776/Elementare_Zahlentheorie