Prof. Dr. J. Stix
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2015
Frankfurt/M., 08.07.2015
Abgabetermin: 15.07.2015

Kommutative Algebra

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei M ein R-Modul und $f \in R$. Sei weiter $M^\bullet = (M^i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ der Komplex von R-Moduln gegeben durch $M^i := M$ und $d_i : M^i \to M^{i+1}$, $x \mapsto fx$. Zeige

$$\varinjlim M^\bullet = M_f.$$

Definition: Ein Komplex $(M^i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von R-Moduln ist hier definiert als als ein Diagramm in $\mathrm{Mod(R)}$ *vom Typ $\mathbb{Z}$. Dabei ist $\mathbb{Z}$ zu verstehen als die Kategorie, deren Objekte die ganzen Zahlen sind und für $m \leq n$ genau ein Morphismus von m nach n existiert. Die restlichen Morphismenmengen sind leer.*

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Kategorie $\mathcal{D}$ heißt *filtriert*, wenn gilt:

1. Für je zwei Objekte D_1, D_2 von $\mathcal{D}$ gibt es ein Objekt D von $\mathcal{D}$ mit Morphismen $D_1 \to D$ und $D_2 \to D$.
2. Für je zwei Morphismen $\varphi_1, \varphi_2 : D_1 \to D_2$ gibt es einen Morphismus $\psi : D_2 \to D_3$ mit $\psi\varphi_1 = \psi\varphi_2$.

Sei nun $\mathcal{D}$ eine kleine, filtrierte Kategorie. Beweise die Exaktheit des Funktors

$$\varinjlim : \ \mathrm{Mod(R)}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{Mod(R)}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $((G_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{j > i \in I}, I)$ ein projektives System endlicher Abelscher Gruppen und es sei $H_i := \bigcap_{j \geq i} \mathrm{im}(\varphi_{ij})$ für alle $i \in I$. Zeige, dass $\psi_{ij} := \varphi_{ij}|_{H_j}$ surjektiv nach H_i abbildet und dass für das projektive System $((H_i)_{i \in I}, (\psi_{ij})_{j \geq i \in I}, I)$ gilt:

$$\varprojlim(H_i) \cong \varprojlim(G_i).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachte auf $\mathbb{N}$ die partielle Ordnung ' $|$ ' (Teilbarkeit) und für alle $d|n$ die natürliche Projektion $\pi_{dn} : \ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Zeige, dass für die beiden projektiven Systeme von Ringen

$$\big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, (\pi_{dn})_{d|n}, (\mathbb{N}, |)\big) \ \text{ und } \ ((\mathbb{Z}/n!\mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}, (\pi_{m!n!})_{m \leq n}, (\mathbb{N}, \leq))$$

gilt:

$$\hat{\mathbb{Z}} := \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \varprojlim \mathbb{Z}/n!\mathbb{Z}.$$

Zeige außerdem

$$\hat{\mathbb{Z}}^\times = \varprojlim((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)$$

und bestimme für einen endlichen Körper $\mathbb{F}$ die absolute Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$.