

Elementare Zahlentheorie

Blatt 13 — 09.07.2015

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei K ein quadratischer Zahlkörper.

- (a) Falls K imaginär-quadratisch ist, betrachte man die natürliche Inklusion

$$\iota_1 : \mathfrak{o}_K \hookrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad x + iy \mapsto (x, y)$$

Zeigen Sie, dass $\iota_1(\mathfrak{o}_K)$ eine diskrete Untergruppe von \mathbb{R}^2 ist.

- (b) Falls K reell-quadratisch ist, betrachte man die beiden Injektionen

$$\iota_2 : \mathfrak{o}_K \hookrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x, x),$$

$$\iota_3 : \mathfrak{o}_K \hookrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x, \bar{x}).$$

Zeigen Sie, dass $\iota_2(\mathfrak{o}_K)$ nicht-diskret und $\iota_3(\mathfrak{o}_K)$ diskret in \mathbb{R}^2 ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. In \mathfrak{o}_K^\times betrachte man die multiplikative Untergruppe

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]_1 := \{u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] : N(u) = 1\}.$$

Welche Werte kann der Index $[\mathfrak{o}_K^\times : \mathbb{Z}[\sqrt{d}]_1]$ annehmen? Finden Sie zu jedem möglichen Wert ein Beispiel.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Die Schlacht von Hastings (14.10.1066)

Harolds Mannen standen nach alter Gewohnheit dichtgedrängt in 13 gleichgroßen Quadraten aufgestellt, und wehe dem Normannen, der es wagte, in eine solche Phalanx einbrechen zu wollen... Als aber Harold selbst auf dem Schlachtfeld erschien, formten die Sachsen ein einziges gewaltiges Quadrat mit ihrem König an der Spitze und stürmten mit den Schlachtrufen „*Ut!*“, „*Dlicrosse!!*“, „*Godemite!*“ vorwärts. ... (aus „*Carmen de Hastingae Proelio*“ von Gui, Bischof von Amiens).

Bestimmen Sie die Mindestgröße der Armee von König Harold II.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$ kein Quadrat. Zeigen Sie, dass die Kettenbruchentwicklung von $x = \frac{1}{2} + \sqrt{d}$ die Form

$$[b_0, \overline{b_1, b_2, \dots, b_2, b_1, 2b_0 - 1}]$$

hat.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 16.07.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/54089776/Elementare_Zahlentheorie
