Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 1 15.10.2015

Aufgabe 1. (Mengen, 4 Punkte)

Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie:

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Aufgabe 2. (Abbildungen I, 1+2+1 Punkte)

Gegeben seien zwei Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(n) := n^2 \quad \text{und} \quad g(n) := [\sqrt{n}] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dabei bezeichnet $[x]$ (genannt *Gauß-Klammer* von $x \in \mathbb{R}$) die größte ganze Zahl, die kleiner gleich x ist.

(a) Bestimmen Sie die Verkettungen $f \circ g$ und $g \circ f$.

(b) Sind die Abbildungen f und g injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Bestimmen Sie die Urbilder von $A := \{1, 3\}$ unter f und g.

Aufgabe 3. (Abbildungen II, 1+3 Punkte)

Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt: $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.
Zusatzfrage (ohne Wertung): Können Sie ein Beispiel angeben, bei dem die Inklusion echt ist?

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist injektiv.

(ii) Für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt: $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$.

(iii) Für alle Teilmengen $A \subseteq X$ gilt: $A = f^{-1}(f(A))$.

Hinweis zu (ii) $\Rightarrow$ (iii)*: Überlegen Sie zunächst, dass $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ für eine beliebige Abbildung f gilt. Somit ist zu zeigen, dass $f^{-1}(f(A)) \setminus A = \emptyset$ unter der Voraussetzung von* (ii) *gilt.*

— bitte wenden —

Aufgabe 4. (Graphen von Abbildungen, 4 Punkte)

Seien X, Y, Z Mengen. Ferner seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Wir definieren folgende Abbildungen (sog. *Projektionen*):

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{12} &: X \times Y \times Z \to X \times Y, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y), \\ \mathrm{pr}_{13} &: X \times Y \times Z \to X \times Z, \quad (x, y, z) \mapsto (x, z), \quad \text{und} \\ \mathrm{pr}_{23} &: X \times Y \times Z \to Y \times Z, \quad (x, y, z) \mapsto (y, z). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\mathrm{pr}_{13}(\mathrm{pr}_{12}^{-1}(\Gamma_f) \cap \mathrm{pr}_{23}^{-1}(\Gamma_g)) = \Gamma_{g \circ f}.$$

Hier noch eine kleine Übersicht von den in der Mathematik verwendeten griechischen Buchstaben. Natürlich gibt es jeden Buchstaben jeweils groß und klein geschrieben. Da die nicht aufgeführten jeweils Buchstaben aus dem lateinischen Alphabet gleichen, werden sie nicht verwendet.

groß	klein	Name	groß	klein	Name
	α	Alpha		ν	Ny
	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma			Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π, ϖ	Pi
	ϵ, ε	Epsilon		ρ, ϱ	Rho
	ζ	Zeta	Σ	σ, ς	Sigma
	η	Eta		τ	Tau
Θ	θ, ϑ	Theta	Υ	υ	Ypsilon
	ι	Iota	Φ	ϕ, φ	Phi
	$\kappa, \varkappa$	Kappa		χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
	μ	My	Ω	ω	Omega

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den **22.10.2015**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`