

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Präsenzaufgabenblatt 1

15.10.2015

Aufgabe P1. (Aussagenlogik)

- (a) Schreiben Sie folgende Aussagen in Symbolen. Dabei dürfen Sie die Bezeichnungen \mathbb{Z} für die Menge der ganzen Zahlen und \mathbb{R} für die Menge der reellen Zahlen verwenden.
- (i) Für alle ganzen Zahlen n gilt: Ist n ungerade, so ist $n^2 + 1$ gerade.
 - (ii) Es existiert zu jeder reellen Zahl x eine reelle Zahl y , so dass $xy = 1$.
 - (iii) Es existiert zu jeder reellen Zahl x genau eine ganze Zahl n , so dass $n \leq x < n + 1$.
 - (iv) Es existiert eine ganze Zahl y , so dass $x + y = 0$ für alle ganzen Zahlen x gilt.

Welche der obigen Aussagen sind wahr bzw. falsch? Wie lauten die Negationen der falschen Aussagen?

- (b) Es sei M die Menge der lebenden Menschen, die lebende Geschwister haben. Betrachten Sie folgende Aussagen
- $\forall x \in M \exists y \in M : x$ ist Schwester oder Bruder von y .
 - $\exists y \in M \forall x \in M : x$ ist Schwester oder Bruder von y .

Worin besteht der Unterschied zwischen den beiden Aussagen? Welche Aussage ist wahr und welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe P2. (Mengen)

Gegeben seien

$$A := \{\emptyset\}, \quad B := \{A, \{A\}\} \quad \text{und} \quad C := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))).$$

- (a) Beschreiben Sie die Menge C durch Auflistung ihrer Elemente.
- (b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\begin{array}{llllll} \square \emptyset \in C & \square \emptyset \subseteq C & \square A \in C & \square A \subseteq C & \square B \in C & \square B \subseteq C \\ \square \{A, B\} \in C & \square \{A, B\} \subseteq C & \square \{A, B\} \cap C = \emptyset & \square \#\{A, B\} \cup C = 6 \end{array}$$

— bitte wenden —

Aufgabe P3. (Abbildungen)

Es bezeichne $\mathbb{R}_{\geq 0}$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Welche der folgenden Vorschriften definieren eine Abbildung? Welche Abbildungen sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

- (a) $f_1 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto x + 1$
- (b) $f_2 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto \frac{x}{2}$
- (c) $f_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y \text{ mit } y^2 = x$
- (d) $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto y \text{ mit } y^2 = x$
- (e) $f_5 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto y \text{ mit } y^2 = x$
- (f) $f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^4$
- (g) $f_7 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^4$
- (h) $f_8 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto x^4$
- (i) $f_9 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto x^4$

Aufgabe P4. (Bilder und Urbilder von Mengen unter Abbildungen)

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Ferner seien $A, B \subseteq X$ und $C, D \subseteq Y$. Zeigen Sie:

- (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- (b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ und die Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht.
- (c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
- (d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
- (e) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.
- (f) $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$
- (g) $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$.
- (h) $f^{-1}(g^{-1}(C)) = (g \circ f)^{-1}(C)$.

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, sondern in den Tutorien besprochen. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16