Algebraische Zahlentheorie

Blatt 1 — 20.10.2015

Aufgabe 1.

(a) Sei $A \subset B$ eine Ringerweiterung und M ein endlich erzeugter A-Modul, auf dem B treu und A-linear operiert. Zeigen Sie, daß B ganz über A ist.

(b) Sei $A \subset B$ eine Ringerweiterung, $u \in B^\times$ und $x \in A[u] \cap A[u^{-1}]$. Zeigen Sie, daß x ganz über A ist.

Tipp: (a) Determinantentrick! (b) Nehmen Sie an, daß $B = A[u, u^{-1}]$ als A-Algebra. Finden Sie dann einen endlich erzeugten A-Modul M mit $xM \subseteq M$ und $1 \in M$. Wenden Sie dann den Beweis von (a) an.

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie den Ganzzahlring $\mathfrak{o}_F$ zu den folgenden Zahlkörpern F und berechnen Sie die Diskriminante Δ_F:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$,

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei.

Aufgabe 3. (Stickelberger Diskriminantensatz)

Sei F ein Zahlkörper. Zeigen Sie, daß die Diskriminante $\Delta_F \equiv 0$ oder 1 modulo 4 ist.

Tipp: Die Diskriminante hat mit der Determinante der Matrix $C = (\sigma(\alpha_i))$ zu tun, worin $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_F$ ist und $\sigma : F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}$ über die Einbettungen in den algebraischen Abschluß läuft. Man sortiere in der Leibnitz-Formel für $\det(C)$ die Terme zu geraden Permutationen zu G und zu den ungeraden Permutationen zu U, also $\det(C) = G - U$. Die Galoisgruppe einer Galoisschen Hülle $\tilde{F}/\mathbb{Q}$ von F vertauscht nur Spalten von C. Analysieren Sie, wie diese Galoisgruppe auf G und U wirkt.

Aufgabe 4. (Spurform)

Es sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung und $\mathrm{tr}_{L/K}$ die Spurform $L \times L \to K$.

(a) Sei $L = K(\alpha)$ von einem Element α mit Minimalpolynom $f \in K[X]$ erzeugt. Bestimmen Sie $\mathrm{tr}_{L/K}\big(\alpha^i/f'(\alpha)\big)$ für $0 \leq i < \deg(f)$.

Tipp: Partialbruchzerlegung von $1/f(X)$, Substitution $Y = 1/X$ und Potenzreihenentwicklung in $Y = 0$.

(b) Zu f und α aus (a) sei $\sum_{i=0}^{\deg(f)-1} \beta_i X^i$ das Polynom $\frac{f(X)}{X-\alpha} \in L[X]$.

Zeigen Sie, daß $\beta_i/f'(\alpha)$ mit $0 \leq i < \deg(f)$ die Dualbasis von $1, \alpha, \ldots, \alpha^{\deg(f)-1}$ bezüglich der Spurform ist.

Tipp: Definieren Sie die Spur eines Polynoms aus $L[X]$ und berechnen Sie

$$\mathrm{tr}_{L/K}\big(\alpha^i/f'(\alpha) \cdot \sum_j \beta_j X^j\big).$$

Aufgabe 5.

Seien F_1, F_2 Zahlkörper mit zueinander teilerfremder Diskriminante Δ_{F_1} und Δ_{F_2}. Zeigen Sie, daß für das Kompositum $F = F_1 F_2$ gilt:

(1) $\mathfrak{o}_F = \mathfrak{o}_{F_1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}_{F_2}$

Tipp: Das kann man so fassen: sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_{F_1}$ und $\beta_1, \ldots, \beta_m$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_{F_2}$, dann wird behauptet, daß $\{\alpha_i\beta_j \; ; \; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_F$ ist.

(2) $\Delta_F = \Delta_{F_1}^{[F_2:\mathbb{Q}]} \cdot \Delta_{F_2}^{[F_1:\mathbb{Q}]}$.

(3) Bestimmen Sie den Ganzheitsring und die Diskriminante von $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{-3})$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 27.10.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/57777299/Algebraische-Zahlentheorie_WS2015_16

---

21. Oktober 2015