Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 2 22.10.2015

Aufgabe 5. (Rechnen in S_n, 2+1+1 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Weiter sei

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-1 & n \\ 2 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} \in S_n.$$

(a) Bestimmen Sie die Wertetabelle von σ^r für $r \in \mathbb{N}$, indem Sie zunächst σ^r für kleinere r ausrechnen, dadurch eine allgemeine Vermutung aufstellen und diese per vollständiger Induktion beweisen.

Bemerkung: Ist $f : X \to X$ eine Selbstabbildung auf einer Menge X, so definieren wir die Potenzen von f rekursiv durch $f^0 := \mathrm{id}_X$ und $f^{r+1} := f \circ f^r$ für $r \in \mathbb{N}_0$.

(b) Bestimmen Sie die Wertetabelle von σ^{-1}.

(c) Geben Sie eine anschauliche Interpretation von (a) und (b) anhand von entsprechenden Bewegungen der geeignet markierten Ecken eines regelmäßigen n-Ecks.

Aufgabe 6. (Gruppen, 4 Punkte)
Sei X eine nichtleere Menge mit einer assoziativen Verknüpfung

$$X \times X \to X,\ (x, y) \mapsto xy.$$

Ferner gebe es für beliebige Elemente $x, y \in X$ stets Elemente $a, b \in X$ derart, dass

$$ax = y \quad \text{und} \quad xb = y.$$

Zeigen Sie, dass X mit der gegebenen Verknüpfung eine Gruppe bildet.
Wozu braucht man die Bedingung $X \neq \emptyset$?

Aufgabe 7. (Beispiel eines Körpers: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, 3+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ zusammen mit der eingeschränkten Addition und Multiplikation reeller Zahlen einen Körper bildet.

(b) Finden Sie $a, b \in \mathbb{Q}$, so dass

$$\frac{(1 + 2\sqrt{2})^2}{3 + \sqrt{2}} - (2 - \sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}.$$

Achten Sie dabei auf den nachvollziehbaren Rechenweg in Ihrer Lösung.

— bitte wenden —

Aufgabe 8. (Potenzmenge als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum, 4 Punkte)

Es sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ zusammen mit der *symmetrischen Differenz*

$$\triangle\colon \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X), \quad (A, B) \mapsto A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

und folgender äußeren Verknüpfung

$$\mathbb{F}_2 \times \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X), \quad (\lambda, A) \mapsto \lambda \cdot A := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \lambda = 0, \\ A, & \text{falls } \lambda = 1, \end{cases}$$

einen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum bildet.

Hinweis zur Assoziativität von $\triangle$: Machen Sie sich zunächst klar, wann ein Element in $A \triangle B$ bzw. $A \triangle (B \triangle C)$ liegt. Formulieren Sie dafür eine notwendig und hinreichende Bedingung bezüglich der Anzahl der auftretenden Teilmengen, in denen dieses Element liegt.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 29.10.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`