Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Präsenzaufgabenblatt 2 22.10.2015

Aufgabe P5. (S_4 und Bewegungen des Quadrats)

Wir nummerieren die Ecken des Quadrats im Uhrzeigersinn mit 1, 2, 3, 4.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \text{——} & 2 \\ | & & | \\ 4 & \text{——} & 3 \end{array}$$

(a) Eine Drehung um $90°$ im Uhrzeigersinn induziert eine Bijektion der Ecken(nummern) und damit ein Element der S_4. Schreiben Sie dieses als Wertetabelle auf.

(b) Stellen Sie sich nun vor, das Quadrat sei starr. Schreiben Sie alle Permutationen der Ecken als Elemente der S_4 auf, die Sie durch Bewegungen des starren Quadrats hinbekommen.

(c) Wählen Sie nun zwei verschiedene Elemente (und nicht die Identität!) aus Ihrer Liste aus, berechnen Sie das Produkt der Permutationen in S_4 und vergleichen Sie diese mit der entsprechenden Hintereinanderausführung der Bewegungen des Quadrats.

Aufgabe P6. (Gruppen)

Welche der folgenden Mengen mit der angegebenen Vorschrift zur Verknüpfung definieren eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $G_1 := [-1,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ mit der üblichen Addition.

(b) $G_2 := \{1,-1\} \subseteq \mathbb{Q}$ mit der üblichen Multiplikation.

(c) $G_3 := \mathbb{N}$ mit der üblichen Multiplikation.

(d) $G_4 := \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ mit $* : G_4 \times G_4 \to G_4,\ (x,y) \mapsto x * y := x + y - xy$.

Aufgabe P7. (Bruchrechnungen im Körper)

Es sei K ein Körper. Für $a, b \in K$ mit $b \neq 0$ schreiben wir $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$. Zeigen Sie die folgenden (aus der Schule für reelle Zahlen bekannten) Rechenregeln für beliebige Körper K, indem Sie aus den Körperaxiomen herleiten:

(a) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ für $a, c \in K$ und $b, d \in K \setminus \{0\}$.

(b) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$ für $a, c \in K$ und $b, d \in K \setminus \{0\}$.

(c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$ für $a, b \in K \setminus \{0\}$.

—— bitte wenden ——

Aufgabe P8. (Vektorräume)

(a) Schreiben Sie die Vektorraumaxiomen auf. Machen Sie sich klar (z.B. durch farbige Markierung), bei welchen Additionen bzw. Multiplikationen es sich um die Addition in K oder in V bzw. die Multiplikation in K oder die skalare Multiplikation handelt.

(b) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie folgende Rechenregeln:

  (i) Für $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt $\lambda \cdot v = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 0$ oder $v = 0$.
  Welche Null in dieser Aussage ist das Nullelement in K, welche das Nullelement in V?

  (ii) Für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt: $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (-v)$.
