Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 3 29.10.2015

Aufgabe 9. (quadratische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten, 4 Punkte)
Eine quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten ist eine Gleichung der Form

$$X^2 + pX + q = 0, \tag{$*$}$$

wobei $p, q \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: Sind $p, q \in \mathbb{R}$, so hat die Gleichung $(*)$ genau eine oder zwei reelle oder zwei nichtreelle komplexe Lösungen.

(b) Sei nun $p = 0$ und $q = -a - bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $(*)$, indem Sie den Ansatz $a + bi = (x + yi)^2$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ machen und den Real- und Imaginärteil vergleichen, um das dadurch entstandene Gleichungssystem nach x, y zu lösen.

(c) Zeigen Sie: Die Gleichung $(*)$ besitzt im Allgemeinen genau eine oder zwei komplexe Lösungen.

(d) Lösen Sie die Gleichung $(*)$ für $p = 2 + 2i$ und $q = -3 + 6i$.

Aufgabe 10. (Unterräume von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 4 Punkte)
Welche der folgenden Teilmengen des reellen Vektorraums $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind Unterräume? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $U_1 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$

(b) $U_2 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \text{ für höchstens endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$

(c) $U_3 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid (\forall x < y : f(x) \leq f(y)) \text{ oder } (\forall x < y : f(x) \geq f(y))\}$

(d) $U_4 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{Q}\}$

Aufgabe 11. (Unterräume von $\mathbb{R}^2$, 4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Unterräume von $\mathbb{R}^2$. Wie sehen sie in der kartesischen Ebene aus?

Aufgabe 12. (lineare Hülle, 1,5+1,5+1 Punkte)
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und seien $A, B \subseteq V$. Zeigen Sie:

(a) $\langle A \cap B \rangle_K \subseteq \langle A \rangle_K \cap \langle B \rangle_K$.
Finden Sie auch ein Beispiel dafür, dass die Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt!

(b) $\langle A \cup B \rangle_K = \langle \langle A \rangle_K \cup \langle B \rangle_K \rangle_K$.

(c) Ist $U \subset V$ ein echter Unterraum, d.h. ein Unterraum von V mit $U \neq V$, so ist $\langle V \setminus U \rangle_K = V$.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 05.11.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`