Algebraische Zahlentheorie

Blatt 2 — 03.11.2015

Aufgabe 6.

Sei k ein Körper. Bestimmen Sie alle diskreten Bewertungen des Körpers der rationalen Funktionen $k(T)$, welche den Konstanten $k^\times \subseteq k(T)^\times$ den Wert 0 zuweisen.

Tipp: Versuchen Sie erst den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers k.

Bemerkung: Diese Bewertungen nennt man k-**Bewertungen von** $k(T)$.

Aufgabe 7.

Zeigen Sie: der Ring $\mathscr{O}_x$ der in einer Umgebung des Punktes $x \in \mathbb{C}$ definierten holomorphen Funktionskeime ist ein diskreter Bewertungsring.

Bemerkung: Diese Aufgabe benötigt offenbar Kenntnisse aus der Funktionentheorie. Funktionskeime bei x sind Äquivalenzklassen von Paaren (U, f) mit U einer offenen Umgebung von x und f einer Funktion auf U. Es sind (U, f) und (V, g) äquivalent, falls es ein (W, h) gibt mit $W \subset U \cap V$ und $f|_W = h = g|_W$.

Aufgabe 8.

Sei $R_0 \subseteq R$ ein Unterring eines diskreten Bewertungsrings R mit $\mathrm{Quot}(R_0) = K = \mathrm{Quot}(R)$. Es bezeichne $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ die Bewertung und $P := v(R_0 \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(a) $P \subseteq \mathbb{N}_0$ ist ein Monoid: $0 \in P$ und wenn $x, y \in P$, dann $x + y \in P$.

(b) Es gibt ein n_0, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $n \in P$.

Aufgabe 9.

Seien $R_0 \subseteq R$ Ringe. Wir betrachten R als R_0-Modul und insbesondere den Quotientenmodul R/R_0. Zeigen Sie:

(a) Der Annullator von R/R_0, a priori das folgende Ideal von R_0

$$\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}_{R_0}(R/R_0) = \{f \in R_0 \; ; \; fx \in R_0 \; \forall x \in R\},$$

ist sogar ein Ideal von R.

(b) Jedes Ideal von R_0, das auch ein Ideal von R ist, ist in $\mathfrak{c}$ enthalten.

(c) Seien $R_0 \subseteq R$ nun Integritätsringe mit $\mathrm{Quot}(R_0) = K = \mathrm{Quot}(R)$, so daß R ein endlich erzeugter R_0-Modul ist. Dann ist $\mathfrak{c} \neq (0)$.

Aufgabe 10.

Für den Zahlköprer $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist $\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[\varphi]$ mit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wir betrachten die Ordnung $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \subseteq \mathfrak{o}_F$. Bestimmen Sie den Index $(\mathfrak{o}_F : \mathfrak{o})$ und berechnen sie das Ideal $\mathfrak{c}$ aus Aufgabe 9 für $R_0 = \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}_F = R$.

Sei nun $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_F$. Wir setzen $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{o}$ und p is die Primzahl mit $(p) = \mathfrak{q} \cap \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie: wenn $p \geq 3$, dann ist $(\mathfrak{o}_F)_\mathfrak{q} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring.

(b) Zu $p = 2$ gibt es ein einziges $\mathfrak{q}$ und

$$R_0 = \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \subsetneq (\mathfrak{o}_F)_\mathfrak{q} = R$$

ist ein echter Unterring. Bestimmen Sie das Monoid P aus Aufgabe 8 in diesem Fall.

(c) Weiter zu $p = 2$. Sei π eine Uniformisierende von R (zeigen Sie, daß $\pi = 2$ eine mögliche Wahl ist). Das Ideal $\mathfrak{c}$ aus Aufgabe 9 ist in diesem Fall von der Form (π^n). Bestimmen Sie n, und bestimmen Sie den Unterring

$$R_0/\mathfrak{c} \subsetneq R/\mathfrak{c}.$$

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 10.11.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/57777299/Algebraische-Zahlentheorie_WS2015_16
