Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 4 05.11.2015

Aufgabe 13. (Erzeugendensystem, lineare Unabhängigkeit und Basis, 4 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{N}$, V ein Vektorraum über einem Körper K mit einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$.

(a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Tupel von Vektoren linear unabhängig sind, ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis von V bilden:

  (i) $(v_1 + v_2, \ldots, v_{n-1} + v_n)$
  (ii) $(v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + \cdots + v_n)$

(b) Ergänzen Sie jeweils die linearen unabhängigen Tupel, die noch keine Basis bilden, zu einer Basis von V.

Aufgabe 14. (Vektorraum der Abbildungen, 1+1+2 Punkte)
Sei X eine Menge und K ein Körper. Wie in der Vorlesung bezeichnet $\mathrm{Abb}(X, K)$ den K-Vektorraum der Abbildungen von X nach K. Zu jedem $a \in X$ definieren wir $\mathbf{1}_a \in \mathrm{Abb}(X, K)$ durch

$$\mathbf{1}_a : X \to K,\ x \mapsto \mathbf{1}_a(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = a, \\ 0, & \text{falls } x \neq a. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge $M := \{\mathbf{1}_a \mid a \in X\}$ ist linear unabhängig.

(b) Ist X endlich, so bildet M sogar eine Basis von $\mathrm{Abb}(X, K)$.

(c) Ist X unendlich, so bildet M keine Basis von $\mathrm{Abb}(X, K)$.
Was ist in diesem Fall die lineare Hülle $\langle \mathbf{1}_a \mid a \in X \rangle_K \subseteq \mathrm{Abb}(X, K)$?

Aufgabe 15. ($\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum, 1+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, zusammen mit der Addition reeller Zahlen und der skalaren Multiplikation

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x,$$

wobei "$\cdot$" die Multiplikation in $\mathbb{R}$ bezeichnet, einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum bildet.

(b) Zeigen Sie, dass $1, \sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind.
*Bemerkung – Sie dürfen folgendes verwenden: Ist $n \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl, d.h. es gibt kein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = m^2$, so ist $\sqrt{n}$ **irrational**, d.h. $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 16. (nicht endlich erzeugte Vektorräume, 4 Punkte)

Es sei K ein Körper.

(a) Sei V ein K-Vektorraum mit einer unendlichen Folge $v_1, v_2, \ldots$ von Vektoren aus V derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist. Zeigen Sie, dass V nicht endlich erzeugt ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Vektorraum der Folgen, $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$, nicht endlich erzeugt ist.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 12.11.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`