

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Präsenzaufgabenblatt 4

05.11.2015

Aufgabe P13. (Erzeugendensysteme, lineare Unabhängigkeit und Basis)

Untersuchen Sie, welche der folgenden Tupel von Vektoren in den gegebenen Vektorräumen linear unabhängig sind, ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis bilden.

- (a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ in \mathbb{R}^2 als \mathbb{R} -Vektorraum
- (b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ in \mathbb{R}^2 als \mathbb{R} -Vektorraum
- (c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ in \mathbb{R}^2 als \mathbb{R} -Vektorraum

Geben Sie zu jedem linear abhängigen Tupel auch eine nichttriviale Linearkombination an, die den Nullvektor ergibt.

Aufgabe P14. (lineare Abhängigkeit zweier Vektoren)

Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Ferner seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) (v, w) ist linear abhängig.
- (b) Es gibt ein $\lambda \in K$, so dass $v = \lambda w$.
- (c) Es gibt ein $\mu \in K$, so dass $w = \mu v$.

Wozu benötigt man die Bedingung $v, w \neq 0$?

Aufgabe P15. (Permutation von linearen unabhängigen Vektoren)

Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Ferner sei $n \in \mathbb{N}$ und (v_1, \dots, v_n) ein Tupel von linear unabhängigen Vektoren in V . Zeigen Sie, dass für alle Permutationen $\sigma \in S_n$ das mit σ permutierte Tupel $(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$ linear unabhängig ist.

Aufgabe P16. (Basis und Dimension)

Gegeben sei $U := \left\{ x \in \mathbb{Q}^4 \mid \exists a, b \in \mathbb{Q} : x = \begin{pmatrix} 2a + b \\ a \\ -2b \\ b \end{pmatrix} \right\}$

- (a) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum des \mathbb{Q} -Vektorraums \mathbb{Q}^4 ist.
- (b) Finden Sie eine Basis und die Dimension von U .

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, sondern in den Tutorien besprochen. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16