Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 5 12.11.2015

Auf diesem Blatt bezeichne stets K einen Körper.

Aufgabe 17. (Summe und Schnitt von Unterräumen, 4 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen für alle Vektorräume V über K und alle Unterräume $U_1, U_2, W \subseteq V$ wahr sind. Geben Sie dafür einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) $(U_1 \cap U_2) + W \subseteq (U_1 + W) \cap (U_2 + W)$.

(b) $(U_1 \cap U_2) + W \supseteq (U_1 + W) \cap (U_2 + W)$.

(c) $(U_1 + U_2) \cap W \subseteq (U_1 \cap W) + (U_2 \cap W)$.

(d) $(U_1 + U_2) \cap W \supseteq (U_1 \cap W) + (U_2 \cap W)$.

Aufgabe 18. (Anwendungen der Dimensionsformel, 4 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $U_1, \ldots, U_n \subseteq V$ endlichdimensionale Unterräume. Zeigen Sie:

(a) $\dim(U_1 + \cdots + U_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \dim((U_1 + \cdots + U_k) \cap U_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} \dim U_k$.

Hinweis – Diese Gleichung lässt sich z.B. durch vollständige Induktion beweisen.

(b) Ist $n = 3$, so gilt:

$$\begin{aligned}\dim(U_1 + U_2 + U_3) + \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_2 \cap U_3) + \dim(U_3 \cap U_1)\\ \leq \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3).\end{aligned}$$

Zusatzfrage (ohne Wertung) – Können Sie ein Beispiel dafür angeben, dass die Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt?

Aufgabe 19. (lineare Abbildungen I, 4 Punkte)
Untersuchen Sie jeweils, ob es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften gibt. Geben Sie im Falle der Existenz eine explizite Formel von $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ an.

(a) $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 20. (lineare Abbildungen II, 2+2 Punkte)
Seien V, W zwei K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Für $M \subseteq V$ gilt: $\langle f(M) \rangle_K = f(\langle M \rangle_K)$.

(b) Für $N \subseteq W$ gilt: $\langle f^{-1}(N) \rangle_K \subseteq f^{-1}(\langle N \rangle_K)$, und die Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 19.11.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`