Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 6 19.11.2015

Auf diesem Blatt bezeichne stets K einen Körper.

Aufgabe 21. (Endomorphismen auf dem Folgenraum, 1+1+2 Punkte)

Auf dem Vektorraum $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$ der Folgen über K definieren wir folgende Abbildungen:

$$\phi_l : V \to V, \quad x := (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto \phi_l(x) := (x_2, x_3, x_4, \ldots), \quad \text{und}$$
$$\phi_r : V \to V, \quad x := (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto \phi_r(x) := (0, x_1, x_2, \ldots).$$

(a) Zeigen Sie, dass ϕ_l und ϕ_r jeweils einen K-Endomorphismus auf V definieren.

(b) Zeigen Sie: $\phi_l \circ \phi_r = \mathrm{id}_V$, aber $\phi_r \circ \phi_l \neq \mathrm{id}_V$.

(c) Untersuchen Sie ϕ_l und ϕ_r auf Injektivität und Surjektivität, und bestimmen Sie deren Kern und Bild.

Aufgabe 22. (Inklusionsketten von Kernen und Bildern, 1+2+1 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Für $n \in \mathbb{N}_0$ kürzen wir die n-fache Verkettung von f mit sich selbst durch

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}}$$

ab. Dabei ist per Konvention $f^0 = \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie:

(a) Es gelten folgende Inklusionsketten:

$$0 = \ker(f^0) \subseteq \ker(f^1) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \ldots \quad \text{und}$$
$$V = \mathrm{im}(f^0) \supseteq \mathrm{im}(f^1) \supseteq \mathrm{im}(f^2) \supseteq \ldots$$

(b) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $\ker(f^{n_0}) = \ker(f^{n_0+1})$ und $\mathrm{im}(f^{n_0}) = \mathrm{im}(f^{n_0+1})$, und für $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit dieser Eigenschaft gelten sogar

$$\ker(f^{n_0}) = \ker(f^{n_0+r}) \quad \text{und} \quad \mathrm{im}(f^{n_0}) = \mathrm{im}(f^{n_0+r}) \quad \text{für alle } r \in \mathbb{N}.$$

(c) Für n_0 wie in (b) gilt: $V = \ker(f^{n_0}) \oplus \mathrm{im}(f^{n_0})$.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 23. (Darstellungsmatrizen, 4 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathscr{B} := (1, i)$. Bestimmen Sie im folgenden für $j = 1, 2, 3, 4$ die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(f_j)$ der gegebenen $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bzgl. $\mathscr{B}$:

(a) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \Re(z)$ (der Realteil von z).

(b) $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \Im(z)$ (der Imaginärteil von z).

(c) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}$.

(d) $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto (3 + 2i) \cdot z$.

Aufgabe 24. (Fibonacci-Folge I, 0,5+1+1,5+1 Punkte)

Im reellen Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der reellen Folgen definieren wir

$$U := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ist.

(b) Wir definieren zwei reelle Folgen $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch folgende Rekursionen:

$$\begin{array}{llll} a_1 = 1, \quad a_2 = 0 & \text{und} & a_{n+2} = a_{n+1} + a_n & \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \\ b_1 = 0, \quad b_2 = 1 & \text{und} & b_{n+2} = b_{n+1} + b_n & \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $\mathscr{B} := (a, b)$ eine Basis von U ist.

(c) Es sei

$$\phi_l : U \to U,\ x := (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto \phi_l(x) := (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

Zeigen Sie, dass ϕ_l ein (wohldefinierter) Automorphismus auf dem reellen Vektorraum U ist.

(d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\phi_l)$.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 26.11.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`