Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Präsenzaufgabenblatt 6 19.11.2015

Aufgabe P21. (direkte Summen I)

Untersuchen Sie, welche der folgenden Paare von Unterräumen in $\mathbb{R}^3$ eine direkte Summe bilden.

(a) $U_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ und $U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.

(b) $U_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ und $U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.

(c) $U_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ und $U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.

(d) $U_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ und $U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe P22. (direkte Summen II)

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) $U_1 \oplus U_2 = V$.

(b) $U_1 + U_2 = V$ und $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V$.

(c) $U_1 \cap U_2 = 0$ und $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V$.

Aufgabe P23. (Darstellungsmatrizen I)

Auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir folgende Abbildung:

$$f : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}],\ x \mapsto (3 - \sqrt{2}) \cdot x.$$

(a) Zeigen Sie, dass f linear über $\mathbb{Q}$ ist. Was sind $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$?

(b) Sei $\mathscr{B}$ die Basis $(1, \sqrt{2})$ von $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Bestimmen Sie $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f)$.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe P24. (Darstellungsmatrizen II)

Es seien zwei Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ -2x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass f und g lineare Abbildungen sind.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f)$ und $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(g)$, wobei $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

(c) Berechnen Sie $(f+g)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f+g)$.

(d) Verifizieren Sie die Gleichung $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f) + \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(g) = \mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f+g)$.