Algebraische Zahlentheorie

Blatt 3 — 24.11.2015

Aufgabe 11. (Ein nichteuklidischer Hauptidealring)

Zeigen Sie, daß der Ring $A = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2+1)$ nicht euklidisch wohl aber ein Hauptidealring ist. Anleitung:

(a) Als $\mathbb{R}[X]$-Modul ist A frei vom Rang 2, isomorph zu $\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}[X]y$, wobei y das Bild von Y in A ist.

(b) Betrachten Sie zu $f \in A$ die Matrix $\Lambda_f \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}[X])$ der Linksmultiplikation mit f.

(c) Ist f eine Einheit, dann ist $\det(\Lambda_f)$ eine Einheit in $\mathbb{R}[X]$. Bestimmen Sie die Einheiten von A.

(d) Wir nehmen nun an, A sei euklidisch bezüglich der Gradfunktion

$$\delta : A \to \mathbb{N}_0.$$

Wir normalisieren die euklidische Gradfunktion so, daß $\delta^{-1}(0) = A^\times$.

Wähle $f \in A$ mit $\delta(f) > 0$ minimal. Zeigen Sie: es gibt einen Isomorphismus

$$\varphi : A/(f) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R},$$

wobei $\varphi|_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, da jedes Element in A modulo (f) kongruent zu einer Einheit von A ist.

(e) Es gibt keinen $\mathbb{R}$-linearen Homomorphismus $A \to \mathbb{R}$. Widerspruch.

(f) Finden Sie eine Inklusion $A \subset \mathbb{C}[U,U^{-1}]$, so daß $U = X + iY$ ist, insbesondere ist A ein Integritätsring.

(g) Auf $\mathbb{C}[U,U^{-1}]$ setzen wir die komplexe Konjugation von $\mathbb{C}$ durch

$$\tau : U \mapsto -U^{-1}$$

fort. Der Ring A ist der Fixring unter τ.

(h) Sei nun $I \lhd R$ ein Ideal. Sein Bild in $\mathbb{C}[U,U^{-1}]$ erzeugt ein τ-invariantes Hauptideal. Dieses kann von einem τ-invarianten Element erzeugt werden, das dann auch I erzeugt.

Aufgabe 12. (Eine Ordnung mit Knoten)

Für den Zahlköprer $F = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ ist $\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Wir betrachten die Ordnung $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathfrak{o}_F$ mit $\alpha = 1 + 3\sqrt{7}$. Bestimmen Sie den Index $(\mathfrak{o}_F : \mathfrak{o})$.

Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_F$. Wir setzen $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{o}$ und p is die Primzahl mit $(p) = \mathfrak{q} \cap \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie: wenn $p \neq 3$, dann ist $(\mathfrak{o}_F)_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ ein diskreter Bewertungsring.

(b) Zu $p = 3$ gibt es zwei Primideale $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{o}$ und

$$R_0 = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \subsetneq (\mathfrak{o}_F)_{\mathfrak{q}_i} = R_i$$

ist ein echter Unterring. Bestimmen Sie das Monoid P aus Aufgabe 8 in diesem Fall in Bezug auf R_i für $i = 1, 2$.

(c) Weiter zu $p = 3$. Sei π eine Uniformisierende von R_i (zeigen Sie, daß $\pi = 3$ eine mögliche Wahl ist). Bestimmen Sie den Unterring

$$R_0/\mathfrak{p} \subsetneq R_1/\mathfrak{q}_1 R_1 \times R_2/\mathfrak{q}_2 R_2.$$

Aufgabe 13. (Schwache Approximation I)

Sei A ein Dedekindring mit Quotientenkörper K. Zeigen Sie:

(a) Für paarweise verschiedene maximale Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ von A und $n_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \dots, r$ gibt es ein $x \in K$, so daß

  (i) $v_{\mathfrak{p}_i}(x) = n_i$ für $i = 1, \dots, r$, und

  (ii) $v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ für alle maximalen Primideale $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$.

(b) Wenn A nur endlich viele Primideale hat, dann ist A ein Hauptidealring.

Aufgabe 14. (Schwache Approximation II)

Sei A ein Dedekindring mit Quotientenkörper K. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

(a) Die Idealklassengruppe $\mathrm{Cl}(A)$ ist eine Torsionsgruppe.

(b) Jeder Zwischenring $A \subseteq B \subseteq K$ ist von der Form $B = S^{-1}A$ für ein geeignetes multiplikatives System S.

Tipp: Für (b) $\Longrightarrow$ (a) nutzen Sie für jedes maximale Primideal $\mathfrak{p}$ Aufgabe 13(a), um eine $x \in K$ zu finden mit $v_\mathfrak{p}(x) = -1$ und $v_\mathfrak{q}(x) \geq 0$ für alle $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$. Betrachten Sie dann $B = A[x]$.
Für (a) $\Longrightarrow$ (b) betrachten sie zu $x \in B$ den Divisor $\mathrm{div}(x) = D_+ - D_-$ mit

$$D_+ = \sum_{v_\mathfrak{p}(x)>0} v_\mathfrak{p}(x) \cdot \mathfrak{p} \quad \text{und} \quad D_- = -\sum_{v_\mathfrak{p}(x)<0} v_\mathfrak{p}(x) \cdot \mathfrak{p}.$$

Nutzen Sie dann, daß die Klasse von $D_\pm$ in $\mathrm{Cl}(A)$ torsion ist. Sie erhaltten für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ eine Darstellung von $x^n = a/s$ mit teilerfremden Zähler und Nenner. Schließen Sie, daß $1/s \in B$. Sie brauchen auch noch, daß $S^{-1}A$ als Dedekindring genz abgeschlossen ist.

Aufgabe 15. (Klassengruppe der Lokalisierung)

Sei A ein Dedekindring. Zeigen sie die Äquivalenz von:

(a) $\mathrm{Cl}(A)$ ist endlich erzeugt.

(b) Es gibt ein $f \in A$ und A_f ist Hauptidealring.

Tipp: Beweisen Sie zu einem multiplikativen System $S \subseteq A$ die exakte Sequenz

$$0 \to A^\times \to (S^{-1}A)^\times \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset} \mathbb{Z} \cdot \mathfrak{p} \to \mathrm{Cl}(A) \to \mathrm{Cl}(S^{-1}A) \to 0.$$

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 01.12.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter
http://www.uni-frankfurt.de/57777299/Algebraische-Zahlentheorie_WS2015_16
