

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Präsenzaufgabenblatt 7

26.11.2015

Auf diesem Blatt bezeichne stets K einen Körper.

Aufgabe P25. (Matrizenmultiplikationen)

Gegeben seien folgende Matrizen über \mathbb{C} :

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1+i \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \\ 0 & 1 & 1+i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_4 := \begin{pmatrix} i & i \\ 1-i & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle möglichen Produkte $A_j A_k$ für $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$

Aufgabe P26. (Projektoren)

Zeigen Sie:

- (a) Ist $n \in \mathbb{N}$, so liefert eine Matrix $A \in M_n(K)$ genau dann einen Projektor $L_A : K^n \rightarrow K^n$, wenn $A^2 = A$. Dabei bedeutet $A^2 := AA$.
- (b) Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_2)$ definiert einen Projektor auf dem \mathbb{F}_2 -Vektorraum \mathbb{F}_2^3 .

Aufgabe P27. (Isomorphismen und invertierbare Matrizen)

Seien V, W zwei K -Vektorräume der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ linear. Ferner sei \mathcal{B} eine Basis von V , \mathcal{C} eine von W und $A := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$. Zeigen Sie:

- (a) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = \mathbf{1}_n$.
- (b) Ist f ein Isomorphismus und $B := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f^{-1})$, so ist $AB = BA = \mathbf{1}_n$. Insbesondere ist die Darstellungsmatrix eines Isomorphismus invertierbar.
- (c) Ist A invertierbar, so definiert A^{-1} bezüglich der Basen \mathcal{C} und \mathcal{B} die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \rightarrow V$ zu f .

Aufgabe P28. (Elementarmatrizen)

Sei $\lambda \in K^\times$. Zeigen Sie folgende Gleichung in $M_2(K)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Können Sie diese Gleichung auf $M_n(K)$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebig verallgemeinern?

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, sondern in den Tutorien besprochen. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16