Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 7 26.11.2015

Auf diesem Blatt bezeichne stets K einen Körper. Ferner seien $m, n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 25. (Matrixmultiplikation und Darstellungsmatrizen, 1+1+2 Punkte)
Es sei $A := \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$. Ferner seien $v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$.

(a) Berechnen Sie Av_1, Av_2 und stellen Sie diese als Linearkombination von v_1, v_2 dar.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B} := (v_1, v_2)$ eine Basis des $\mathbb{Q}^2$ ist.

(c) Wie in der Vorlesung bezeichnet $L_A : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ die Linksmultiplikation mit A. Bestimmen Sie $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(L_A)$ und finden Sie die allgemeine Formel für $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(L_{A^n})$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$. Dabei bedeutet $A^n := \underbrace{A \cdots A}_{n\text{-mal}}$.

Aufgabe 26. (invertierbare Matrizen, 2+2 Punkte)
Es sei $S \in \mathrm{M}_n(K)$. Zeigen Sie:

(a) Die Spalten von S sind genau dann linear abhängig, wenn es einen Vektor $x \in K^n \setminus \{0\}$ gibt, so dass $Sx = 0$.

(b) S is genau dann invertierbar, wenn die Spalten von S eine Basis von K^n bilden.

Aufgabe 27. (elementare Spaltenoperationen, 3+1 Punkte)
Es seien $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ und $A := [v_1, \ldots, v_m] \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$. Des Weiteren seien $\lambda \in K$, $\mu \in K^\times$ und $\alpha \neq \beta \in \{1, \ldots, m\}$.

(a) Seien $E_{\alpha\beta}(\lambda)$ und $E_{\alpha\alpha}(\mu)$ die in der Vorlesung definierten Elementarmatrizen in $\mathrm{M}_m(K)$. Bestimmen Sie $AE_{\alpha\beta}(\lambda)$ und $AE_{\alpha\alpha}(\mu)$. Welchen elementaren Spaltenoperationen entsprechen also die Multiplikation mit Elementarmatrizen von Rechts?

(b) Folgern Sie:

(i) $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle_K = \langle v_1, \ldots, v_{\alpha-1}, v_\alpha + \lambda v_\beta, v_{\alpha+1}, \ldots, v_m \rangle_K$.

(ii) $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle_K = \langle v_1, \ldots, v_{\alpha-1}, \mu v_\alpha, v_{\alpha+1}, \ldots, v_m \rangle_K$.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 28. (Vektorraum der Polynomfunktionen, 0,5+1+1,5+1 Punkte)

Wir betrachten den K-Vektorraum $\mathrm{Pol}_{K,\leq n}$ der Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$, d.h.

$$\begin{aligned}\mathrm{Pol}_{K,\leq n} &:= \{f : K \to K \mid \exists\, c_0, c_1, \ldots, c_n \in K\, \forall\, x \in K : f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n\} \\ &= \langle e_0, e_1, \ldots, e_n\rangle_K \subseteq \mathrm{Abb}(K, K),\end{aligned}$$

wobei für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die Polynomfunktion e_k durch $e_k(x) := x^k$ für alle $x \in K$ definiert ist.

Wir nehmen nun an, dass K mindestens $n+1$ Elemente hat. Ferner seien $a_0, \ldots, a_n \in K$ paarweise verschieden. Zu jedem $k = 0, 1, \ldots, n$ definieren wir $f_k \in \mathrm{Pol}_{K,\leq n}$ durch

$$f_k : K \to K,\ x \mapsto f_k(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - a_i}{a_k - a_i}$$

(a) Zeigen Sie: die Abbildung $\varphi : \mathrm{Pol}_{K,\leq n} \to K^{n+1}, f \mapsto \begin{pmatrix} f(a_0) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{pmatrix}$ ist K-linear.

(b) Berechnen Sie $\varphi(f_0), \ldots, \varphi(f_n)$ und folgern Sie, dass $f_0, \ldots, f_n \in \mathrm{Pol}_{K,\leq n}$ linear unabhängig über K sind.

(c) Folgern Sie, dass sowohl $\mathscr{B} := (e_0, \ldots, e_n)$ als auch $\mathscr{C} := (f_0, \ldots, f_n)$ jeweils eine Basis von $\mathrm{Pol}_{K,\leq n}$ bilden, und es gilt: $\varphi = \kappa_{\mathscr{C}}$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $S^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}$.

(d) Sei nun $K = \mathbb{R}$. Finden Sie eine reelle Polynomfunktion f vom Grad ≤ 7, so dass

$$f(1) = 1,\ f(2) = 3,\ f(3) = f(4) = 0,\ f(5) = f(6) = 1 \ \text{ und } \ f(7) = f(8) = 0.$$

Bemerkung – Sollten in Ihrer Antwort die Polynomfunktionen f_k's auftreten, dürfen Sie solche Terme ohne Ausmultiplizieren stehen lassen.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 03.12.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`