2. Übungsblatt zu der Vorlesung
"Analysis und Lineare Algebra für Informatiker"

Frankfurt, den 19.10.2015

Abgabetermin: 26.10.2015, 10:00 – vor der Vorlesung

5.) Geben Sie – mit Begründung – zwei nichtleere Mengen A und B sowie eine Teilmenge T von $A \times B$ an, die sich *nicht* als Cartesisches Produkt $T = A' \times B'$ mit $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ schreiben läßt.

(4 Punkte)

6.) Stellen Sie die folgenden Relationen $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ graphisch dar, und entscheiden Sie – mit Begründung – ob es sich um eine Abbildung handelt. Gegebenenfalls ist diese Abbildung in der Form $y = f(x)$ anzugeben.

i) $A = B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \,|\, x = y + 1\}$.

ii) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \,|\, 0 \leq x - y < 1\}$.

iii) $A = B = [-1, 1]$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$.

iv) $A = B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \,|\, y = x^2\}$.

v) $A = B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \,|\, x = y^2\}$.

vi) $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B \,|\, x \text{ ist ein Teiler von } y\}$.

(9 Punkte)

7.) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$;

ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x$;

iii) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(n) = 3n + 2$.

(3 Punkte)

8.) Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Beweisen Sie:

i) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

ii) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

iii) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

iv) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(4 Punkte)