3. Übungsblatt zu der Vorlesung

"Analysis und Lineare Algebra für Informatiker"

Frankfurt, den 26.10.2015

Abgabetermin: 2.11.2015, 10:00 – vor der Vorlesung

9.) Gegeben seien die beiden Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := (x, 0),\ g(x, y) := x.$$

i) Berechnen Sie $(g \circ f)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Berechnen Sie $(f \circ g)(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

iii) Untersuchen Sie alle vier Abbildungen $f, g, g \circ f, f \circ g$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(4 Punkte)

10.) Es sei $M := \{1, 2, 3\}$, und $S(M)$ sei die Gruppe der Bijektionen von M in sich. Die Abbildungen $f, g \in S(M)$ seien definiert durch

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 1;$$
$$g(1) = 2,\ g(2) = 1,\ g(3) = 3.$$

Berechnen Sie die Abbildungen f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$, indem Sie explizit für all diese Abbildungen die Funktionswerte für jedes $m \in M$ angeben.

Welche der gerade genannten Abbildungen sind gleich?

(6 Punkte)

11.) Stellen Sie für jeden der drei Restklassenringe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ jeweils die Verknüpfungstafeln für die Addition und die Multiplikation auf.

(6 Punkte)

12.) Sei $G := [0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x < 1\}$, und definiere auf G eine innere Verknüpfung $\circ$ durch

$$a \circ b := a + b, \text{ falls } a + b < 1,$$
$$a \circ b := a + b - 1, \text{ falls } a + b \geq 1.$$

Beweisen Sie, dass $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

(4 Punkte)